DUMITRU FILIPESCU
RODICA TRANDAFIR
DAN ZORILESCU

PROBABILITĂȚI GEOMETRICE ȘI APLICAȚII

EDITURA DACIA

Scanned with OKEN Scanner

DUMITRU FILIPESCU • RODICA TRANDAFIR
DAN ZORILESCU

PROBABILITĂȚI GEOMETRICE ȘI APLICAȚII

EDITURA DACIA
CLUJ-NAPOCA, 1981

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

PREFAŢĂ 7

CAPITOLUL I Varietăţi măsurabile 9

§.1.1. Invarianţii integrali ai unui grup 9
§.1.2. Grupuri de invarianţă 11
§.1.3. Familii de varietăţi măsurabile 14
§.1.4. Familii de varietăţi măsurabile din planul euclidian 15
§.1.5. Familii de varietăţi măsurabile din spaţiul euclidian R_3 18
§.1.6. Probabilităţi geometrice 22
§.1.7. Probabilităţi geometrice în spaţiul euclidian R_n 22
§.1.8. Probabilităţi geometrice în R_2 şi R_3 34

CAPITOLUL 2. Măsură cinematică 41

§.2.1. Măsură cinematică 41
§.2.2. Măsură cinematică în spaţiile euclidiene R_2; R_3 şi R_n 42
§.2.3. Curbe şi suprafeţe de intersecţie 45
§.2.4. Variabile aleatoare asociate sistemelor de figuri convexe dintr-un spaţiu euclidian 57

CAPITOLUL 3. Reţele într-un spaţiu omogen. 66

§.3.1. Reţele dintr-un spaţiu omogen cu n dimensiuni 66
§.3.2. Reţele în spaţiul euclidian R_n. 68
§.3.3. Reţele în planul euclidian R_2 75
§.3.4. Reţele în spaţiul euclidian R_3. 82
§.3.5. Problema acului a lui Buffon. Extensiuni 87
§.3.6. Noi probleme privind reţelele aleatoare cu aplicabilitate în optimizarea cercetărilor geologice. Estimaţii şi predicţii 96
§.3.7. Metoda numerelor aleatoare pentru estimarea caracteristicilor numerice ale reţelelor aleatoare 110

CAPITOLUL 4. Formule integrale în planul euclidian 115

§.4.1. Formule integrale relativ la figuri convexe 115
§.4.2. Teorema lui H. E. Robbins. Aplicaţii 130
§.4.3. Procese Poisson 133
§.4.4. Formulele date de J. Bronowski şi J. Neyman 137
§.4.5. Unele aplicaţii ale teoriei reţelelor în planul euclidian 149

CAPITOLUL 5. Aplicaţii ale geometriei integrale în spaţiile euclidiene R_3 şi R_n 152

§.5.1. Formule integrale pentru mulţimi convexe în spaţiul euclidian R_n . . . 152
§.5.2. Formule integrale în spaţiul euclidian R_3 161
§.5.3. Aplicaţii ale teoriei reţelelor 174
§.5.4. Procese Poisson în spaţiul euclidian 178
§.5.5. Formulele lui L. A. Santaló 182
§.5.6. Alte aplicaţii 194

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 6. Repartiţii statistice ale diametrelor aparente rezultate prin intersecţia suprafeţelor circulare cu reţele plane aleatoare. Aplicaţii pe secţiuni subţiri de rocă 202
§.6.1. Probleme privind secţiunile subţiri. Caracteristicile aleatoare ale imaginilor particulelor pe secţiuni subţiri 202
§.6.2. Repartiţia caracteristicilor particulelor 203
§.6.3. Intervale de încredere pentru diametrul real al particulelor 214

CAPITOLUL 7. Aplicaţii practice ale teoriei probabilităţilor geometrice în studiul unor probleme geologice 226
§.7.1. Reţele optime de cercetare geofizică 226
§.7.2. Reţele optime de explorare prin foraje sau lucrări miniere subterane ale unor corpuri lenticulare 231
§.7.3. Prognoza zonelor de mineralizare 245
§.7.4. Semivariograma elementelor geometrice. Analiză structurală. Aplicaţii în geologie 249

BIBLIOGRAFIE 266

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚA

Teoria probabilităților geometrice ca ramură a teoriei generale a probabilităților își are începuturile în celebra „problemă a acului" pusă de G. L. Buffon în anul 1777 în lucrarea „Essai d'Arithmetique Morale", problemă rezolvată riguros în anul 1860 de E. Barbier folosind procedee geometrice.

In afară de problema acului, E. Barbier se ocupă și de problema măsurii mulțimii dreptelor din plan, fără a introduce explicit noțiunea de măsură. Problema măsurii mulțimii perechilor de drepte din plan este rezolvată în 1868 de M. W. Crofton în lucrarea „On the theory of local probility applied to straight lines drawn at random in a plane„ în care demonstrează celebrele teoreme care îi poartă numele.

O altă problemă care a stat mult timp în atenția matematicienilor vremii, a fost așa-numitul „paradox al lui Bertrand", prin aceea că acesta oferă trei soluții ale problemei care din punct de vedere intuitiv par a fi corecte. Cele trei rezultate distincte se datoresc faptului că în fiecare caz se folosește o altă măsură elementară, dintre care numai una este invariantă față de grupul transformărilor ortogonale din plan.

Problema invariantului integral al unui grup Lie de transformări este rezolvată de R. Deltheil în prima carte de probabilități geometrice apărută în 1926 și în care sintetizează toate rezultatele obținute pînă atunci de M. W. Crofton, E. Czuber J. J. Sylvester, E. Cartan, H. Lebesgue, B. Hostinsky, W. Blaschke, G. Polya.

Problematica specifică Teoriei probabilităților. geometrice, care se referă la măsurabilitatea familiilor de varietăți a fost abordată și rezolvată ulterior într-o serie de lucrări de către W. Blaschke, L. A. Santaló, H. Minkovski, S. S. Chern, H. Hadwiger, A. Weil.

Primele preocupări la noi în țară în acest domeniu au fost ale Acad. O. Onicescu, M. Haimovici, G. Vrănceanu, G. Călugăreanu și alții.

Este de remarcat faptul că această teorie interdisciplinară, în care fuzionează elemente de probabilitate și elemente de geometrie, și-a găsit o largă aplicabilitate în diferite domenii ca: mineralogie, metalurgie, biologie etc.

Cartea de față vine să umple un gol în literatura noastră de specialitate tratînd pe lîngă problemele de bază ale teoriei probabilităților geometrice, și aplicațiile practice ale acesteia, pentru prima dată în țara noastră, într-un nou domeniu, cel al cercetărilor geologice și geofizice.

Primele două capitole ale cărții cuprind unele rezultate generale obținute de R. Deltheil., L. A. Santaló, S. S. Chern, H. Minkowski privind familiile de varietăți măsurabile precum și măsura cinematică dintr-un spațiu euclidian. Cu ajutorul

Scanned with OKEN Scanner

acestor noțiuni sînt prezentate probleme de probabilități geometrice cu privire la curbe și suprafețe de intersecție. Aceste capitole cuprind și o serie de rezultate obținute de R. Trandafir.

Capitolul trei este destinat teoriei rețelelor într-un spațiu omogen. Majoritatea rezultatelor din acest capitol reprezintă contribuțiile aduse de R. Trandafir în acest domeniu. Ultimul paragraf al capitolului prezintă modelele elaborate de D. Zorilescu, în baza aplicațiilor teoriei rețelelor, pentru optimizarea cercetărilor geologice.

Capitolele 4 și 5 dezvoltă o serie de formule integrale relativ la mulțimi de figuri convexe dintr-un spațiu euclidian.

In marea lor majoritate rezultatele acestor capitole sînt datorate lui D. Filipescu care generalizează o serie de rezultate obținute de L. A. Santaló, F. Streit și alții.

Aplicațiile teoriei probabilităților geometrice în geologie și geofizică, aplicații care au condus și la unele contribuții noi teoretice, cuprinse în capitolele 6 și 7, privesc estimarea caracteristicilor imaginilor particulelor pe secțiuni subțiri de rocă, optimizarea rețelelor de cercetare și explorare geologică și geofizică, prognoza acumulărilor de substanțe minerale utile etc. Aceste rezultate au fost obținute de D. Zorilescu.

Prin conținutul său cît și prin modul de abordare și rezolvare a problemelor tratate, în majoritate originale și cu aplicabilitate practică, cartea reprezintă o noutate în literatura noastră de specialitate în domeniul teoriei probabilităților geometrice. In acest domeniu, care se bucură de numeroase aplicații, în special în geologie, autorii sînt specialiști, doctori în matematică, publicînd o serie de rezultate în reviste de specialitate din țară și străinătate, dintre care unele au fost menționate în lucrările lui L. A. Santaló, A. Baddeley, și alții.

Cartea se înscrie în mulțimea lucrărilor meritorii apărute la noi în țară, utilă atît matematicienilor cît și specialiștilor din diferite domenii, care vor găsi în ea instrumentul matematic necesar abordării și rezolvării unor probleme practice de actualitate.

Hotărîrea editurii Dacia de a edita o astfel de carte este deci binevenită.

Acad. Gh. Mihoc

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 1

VARIETĂȚI MĂSURABILE

§1.1. INVARIANȚII INTEGRALI AI UNUI GRUP.

Fie în spațiul cu n dimensiuni X^n de coordonate $x^1, x^2, \ldots x^n$, un grup Lie de transformări

$$y^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^r), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

depinzînd de r parametri esențiali* $a^1, \ldots, a^r$.

Definiție. Funcția $F(x^1, \ldots, x^n)$ este funcția invariantă integral a grupului (1.1) dacă

$$\int_{\Omega_x} F(x^1, \ldots, x^n)\mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n = \int_{\Omega_y} F(y^1, \ldots, y^n)\mathrm{d}y^1 \ldots \mathrm{d}y^n \tag{1.2}$$

pentru orice mulțime de puncte Ω_x din X^n pentru care integrala are sens.

Notînd cu $\frac{D(y^1, \ldots, y^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)}$ iacobianul transformării (1.1), relația (1.2) se scrie

$$\int_{\Omega_x} F(x^1, \ldots, x^n)\mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n = \int_{\Omega_x} F(y^1, \ldots, y^n) \frac{D(y^1, \ldots, y^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)} \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$$

relație ce trebuie să aibă loc pentru orice mulțime de puncte pentru care integrala are sens, deci ea este echivalentă cu

$$F(x^1, \ldots, x^n) = \frac{D(y^1, \ldots, y^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)} F(y^1, \ldots, y^n) \tag{1.3}$$

Presupunînd că transformarea identică a grupului (1.1) corespunde valorilor parametrilor $a^1 = \ldots = a^r = 0$, relația (1.3) este verificată și pentru aceste valori. Avem deci

Teorema 1.1. Condiția necesară și suficientă ca relația (1.3) să fie satisfăcută este ca funcția

$$\frac{D(y)}{D(x)} F(y)$$

---

* Parametri $a^1, \ldots, a^r$ sînt esențiali dacă nu se pot lua $s < r$ combinații $A^k(a^1, \ldots, a^r)$ așa încît familia (1.1) să se poată scrie $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, A^1, \ldots, A^s)$.

Scanned with OKEN Scanner

să nu depindă de $a^1, \ldots, a^r$, deci

$$\frac{\partial}{\partial a^h}\left[F(y)\,\frac{D(y)}{D(x)}\right] = 0, \quad (h = 1, 2, \ldots, r) \tag{1.4}$$

sau

$$D\,\frac{\partial F}{\partial a^h} + F\,\frac{\partial D}{\partial a^h} = 0, \quad D = \frac{D(y)}{D(x)}. \tag{1.4'}$$

Dacă $X_h f = \xi_h^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ sînt transformările infinitezimale ale grupului (1.1), ecuaţiile diferenţiale ale lui sînt [21]

$$\frac{\partial y^i}{\partial a^h} = \xi_k^i(y)\varphi_h^k(a), \quad (k = 1, \ldots . r)$$

şi deci

$$\frac{\partial}{\partial a^h}\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial y^i}{\partial a^h}\right) = \varphi_h^k(a)\,\frac{\partial \xi_k^i(y)}{\partial x^j} = \varphi_h^k(a)\,\frac{\partial \xi_k^i(y)}{\partial y^s}\,\frac{\partial y^s}{\partial x^j}.$$

De aici şi din

$$\frac{\partial D}{\partial a^h} = \sum_{i=1}^{n} D_h^i$$

unde D_h^i este determinantul obţinut din D prin derivarea în raport cu a^h a coloanei i, rezultă

$$\frac{\partial D}{\partial a^h} = \varphi_h^k(a) D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_k^i(y)}{\partial y^i}$$

iar sistemul (1.4') se scrie

$$\frac{\partial F(y)}{\partial a^h} + F(y)\varphi_h^k(a) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_k^i(y)}{\partial y^i} = 0$$

sau ţinînd seama de

$$\frac{\partial F(y)}{\partial a^h} = \frac{\partial F(y)}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial a^h} = \frac{\partial F(y)}{\partial y^i}\,\varphi_h^k(a)\,\xi_k^i(y)$$

avem

$$\varphi_h^k(a) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\,[\xi_k^i(y)F(y)] = 0, \quad (h, k = 1, \ldots, r).$$

Aceste relaţii trebuie să aibă loc pentru orice valori ale parametrilor $a^1, \ldots, a^r$, iar pentru $a^1 = \ldots = a^r = 0$ avem $\varphi_h^k = \delta_h^k$, rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y^i}\,[\xi_k^i(y)F(y)] = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema lui Deltheil [20] Funcţiile invariante integral ale unui grup Lie de transformări sînt soluţiile sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale

$$(1.5) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} [\xi_h^i(x) F(x)] = 0, \quad (h = 1, \ldots, r)$$

unde $\xi_h^i(x)$ sînt coeficienţii transformărilor infinitezimale ale grupului.

Definiţie. Numim grup Lie măsurabil, un grup care admite o funcţie invariantă integral unică, abstracţie făcînd de o constantă multiplicativă.

Un grup continuu de transformări G_r este tranzitiv dacă fiind date două puncte P_1 şi P_2 ale spaţiului X^n putem trece totdeauna de la P_1 la P_2 prin cel puţin o transformare a grupului. Pentru aceasta trebuie ca ecuaţiile (1.1) să fie rezolvabile în raport cu $a^1, \ldots, a^r$, deci $r \geqslant n$ şi rang $\left\| \frac{\partial y^i}{\partial a^s} \right\| = n$. Dacă există o singură soluţie în a, se spune că grupul este simplu tranzitiv.

Grupurile simplu tranzitive sînt măsurabile [79].

Grupurile tranzitive abeliene sînt măsurabile şi au funcţia invariantă integral $F = \Delta^{-1}$, $\Delta = \det \| \xi_h^i \|$ [79]

Teorema 1.2. Condiţia necesară şi suficientă ca grupul (1.1) să fie măsurabil este ca el să fie tranzitiv şi să avem satisfăcute relaţiile:

$$(1.6) \qquad c_{uv}^{l} \xi_{\alpha}^{i} \xi_{l}^{j} \bar{\xi}_{j}^{u} \bar{\xi}_{i}^{v} - c_{u\alpha}^{l} \xi_{l}^{i} \bar{\xi}_{i}^{u} = 0, \begin{pmatrix} i, j, u, v = 1, \ldots, n; \\ l = 1, \ldots, r; \quad \alpha = r+1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

unde c_{kl}^{h} este tensorul de structură al grupului, iar $\bar{\xi}_{v}^{u}$ este reciprocul elementului ξ_{u}^{v} din determinantul nenul al matricei $\| \xi_h^i \|$.

Pentru demonstraţie vezi [79]

În cazul grupurilor într-o variabilă, S. Lie a demonstrat că: orice grup într-o variabilă se reduce la grupul translaţiilor, grupul afin sau grupul proiectiv [98]. În [79] se arată că singurul grup într-o variabilă măsurabil este grupul translaţiilor, iar grupurile într-o variabilă nemăsurabile au cel puţin două subgrupuri măsurabile cu invarianţi integrali diferiţi.

§1.2. GRUPURI DE INVARIANŢĂ.

Fie în spaţiul X^n o familie $\mathfrak{F}_q$ de varietăţi cu p dimensiuni definită de ecuaţiile

$$(2.1) \qquad F^{\lambda}(x^1, \ldots, x^n, \alpha^1, \ldots, \alpha^q) = 0, \quad (\lambda = 1, \ldots, n-p)$$

cu $\alpha^1, \ldots, \alpha^q$ parametri esenţiali.

Teorema 2.1. Mulţimea tuturor transformărilor T continui a spaţiului X^n care lasă invariantă global familia $\mathfrak{F}_q$ (adică pentru fiecare varietate $V_p \in \mathfrak{F}_q$, există o varietate $V'_p \in \mathfrak{F}_q$ astfel încît $TV_p = V'_p$) formează un grup Lie de transformări, pe care îl vom nota cu $\mathcal{G}$.

Demonstraţie. Fie I transformarea identică a spaţiului, avem $IV_p = V_p$ pentru orice $V_p \in \mathfrak{F}_q$, deci $I \in \mathcal{G}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă T_a şi T_b sînt două transformări din $\mathcal{G}$ avem

$$T_a V_p = V'_p, \quad T_b V'_p = V''_p, \quad V_p, V'_p, V''_p \in \mathfrak{F}_q$$

deci

$$V''_p = T_b V'_p = T_b T_a V_p. \tag{2.2}$$

Ţinînd seama de faptul că $V_p, V'_p \in \mathfrak{F}_q$ rezultă existenţa unei transformări $T_c \in \mathcal{G}$ aşa încît

$$T_c V_p = V''_p. \tag{2.3}$$

Din (2.2) şi (2.3) rezultă

$$T_b \cdot T_a = T_c$$

adică $T_b T_a \in \mathcal{G}$.

Teorema 2.2. [79] Mulţimea transformărilor $S \in \mathcal{G}$ cu proprietatea $SV_p = V_p$ formează un grup g, subgrup invariant al lui $\mathcal{G}$.

Demonstraţie. Avem evident $I \in g$.

Dacă $S_a, S_b \in g$ atunci

$$S_a V_p = V_p, \quad S_b V_p = V_p$$

şi

$$(S_a S_b) V_p = S_a (S_b V_p) = S_a V_p = V_p$$

deci

$$S_a S_b \in g$$

Să arătăm că g este subgrup invariant.

Fie $T \in \mathcal{G}$ cu

$$T V_p = V'_p$$

Avem

$$(T^{-1} S T) V_p = T^{-1} S (T V_p) = T^{-1} S V'_p = T^{-1} V'_p = V_p$$

deci

$$T^{-1} S T \in g \text{ şi } T^{-1} g\, T = g.$$

Vom ataşa grupului G grupul factor

$$G = \frac{\mathcal{G}}{g}$$

care are proprietatea de a lăsa invariantă familia de varietăţi $\mathfrak{F}_q$, fără a conţine transformări (afară de I) care să lase invariantă fiecare varietate a familiei.

Definiţie. Grupul G se numeşte grup maxim de invarianţă al familiei $\mathfrak{F}_q$ şi subgrupurile lui cu aceeaşi proprietate, grupuri de invarianţă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $G_r(x)$ este un grup de invarianţă al familiei $\mathfrak{F}_q$ de ecuaţii

$$y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^r) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

cu $a^1, \ldots, a^r$ parametri esenţiali, avem

$$F^\lambda[f^1(x, a), \ldots, f^n(x, a), \beta^1, \ldots \beta^q] = F^\lambda[x^1, \ldots, x^n, \alpha^1, \ldots, \alpha^q] \tag{2.5}$$

cu

$$\beta^k = g^k(\alpha^1, \ldots, \alpha^q, a^1, \ldots, a^r), \qquad (k = 1, \ldots, q). \tag{2.6}$$

Deci grupului $G_r(x)$ i se poate ataşa în apaţiul $\mathfrak{X}_q$ al parametrilor familiei $\mathfrak{F}_q$, familia de transformări (2.6). Această familie de transformări are r parametri esenţiali (deoarece G_r nu conţine transformări care să lase invariantă fiecare varietate a familiei $\mathfrak{F}_q$) şi o vom nota cu $H_r(\alpha)$.

$H_r(\alpha)$ formează un grup izomorf cu G_r [79].

Teorema 2.3. Date două grupuri izomorfe $G_r(x)$ şi $H_r(\alpha)$, condiţia necesară şi suficientă ca $G_r(x)$ să fie grup de invarianţă al familiei de varietăţi (2.1) este ca

$$\xi_h^i(x) \frac{\partial F^\lambda(x,\alpha)}{\partial x^i} + \eta_h^\nu(\alpha) \frac{\partial F^\lambda(x,\alpha)}{\partial \alpha^\nu} = 0 \tag{2.7}$$

În acest caz $H_r(\alpha)$ este grupul ataşat grupului de invarianţă $G_r(x)$ faţă de familia $\mathfrak{F}_q$.

Pentru demonstraţie vezi [93].

Următoarea teoremă ne arată în ce condiţii sistemul (2.7) admite soluţii acceptabile [79].

Teorema 2.4. Date două grupuri izomorfe $G_r(x)$ şi $H_r(\alpha)$, condiţia necesară şi suficientă ca să existe o familie $\mathfrak{F}_q$ de varietăţi V_p care să admită ca grup de invarianţă pe $G_r(x)$ este ca rangul matricei

$$\| \xi_h^1(x) \ldots \xi_h^n(x) \eta_h^1(\alpha) \ldots \eta_h^q(\alpha) \|$$

să fie $r_1 < n + q$. În aceste condiţii familia $\mathfrak{F}_q$ este definită de

$$\Phi^\lambda[\varphi^1(x, \alpha), \ldots, \varphi^{n+q-r_1}(x, \alpha)] = 0, \qquad (\lambda = 1, \ldots, n - p)$$

cu $\varphi^k(x, \alpha)$, $(k = 1, \ldots, n + q - r_1)$ integrale independente ale sistemului

$$\xi_h^i(x) \frac{\partial F^\lambda(x,\alpha)}{\partial x^i} + \eta_h^\nu(\alpha) \frac{\partial F^\lambda(x,\alpha)}{\partial \alpha^\nu} = 0, \quad (h = 1, \ldots, r_1)$$

iar $\xi_h^i(x)$ şi $\eta_h^\nu(\alpha)$, sînt coeficienţii transformărilor infinitezimale ale grupurilor $G_r(x)$ şi $H_r(\alpha)$. Grupul $H_r(\alpha)$ este grupul ataşat grupului de invarianţă al familiei $\mathfrak{F}_q$.

Scanned with OKEN Scanner

§1.3. FAMILII DE VARIETĂȚI MĂSURABILE.

Definiție. Numim măsură a unei mulțimi $\mathfrak{Q}$ de varietăți V_p față de grupul G_r, expresia

$$\mu_{G_r}(\mathfrak{Q}) = \int_{\mathfrak{Q}_\alpha} |F(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)| \, d\alpha^1 \wedge \ldots \wedge d\alpha^q \tag{3.1}$$

unde $\mathfrak{Q}_\alpha$ este mulțimea de puncte care corespunde în spațiul X_q al parametrilor familiei (2.1) mulțimii $\mathfrak{Q}$ de varietăți, iar $F(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)$ este funcția invariantă integral a grupului $H_r(\alpha)$. Expresia diferențială

$$|F(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)| d\alpha^1 \wedge \ldots \wedge d\alpha^q$$

se numește măsură elementară a familiei de varietăți (2.1).

Dacă se face o schimbare de variabile

$$\alpha^k = \alpha^k(\beta^1, \ldots, \beta^q), \qquad (k = 1, \ldots, q)$$

alegînd funcțiile $\alpha^k(\beta^1, \ldots, \beta^q)$ așa încît să avem

$$|F(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)| \frac{D(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)}{D(\beta^1, \ldots, \beta^q)} = 1$$

măsura (3.1) devine

$$\mu_{G_r}(\mathfrak{Q}) = \int_{\mathfrak{Q}_\beta} d\beta^1 \wedge \ldots \wedge d\beta^q \tag{3.2}$$

și reprezintă volumul mulțimii de puncte $\mathfrak{Q}_\beta$. Parametri $\beta^1, \ldots, \beta^q$ se numesc normali.

O familie de varietăți poate avea mai multe grupuri de invarianță, deci poate avea mai multe măsuri diferite.

Definiție. Numim măsurabilă, familia de varietăți care admite o măsură unică.

O condiție suficientă de măsurabilitate a unei familii de varietăți este următoarea [82].

Teorema 3.1. Dacă grupul atașat grupului maxim de invarianță al unei familii de varietăți este măsurabil, atunci familia este măsurabilă.

Demonstrație. Dacă grupul H este măsurabil atunci familia de varietăți admite cel puțin o măsură μ. Presupunînd că familia admite și măsura $\mu' \neq \mu$; rezultă că există un grup H_r atașat grupului de invarianță G_r, măsurabil și față de care familia de varietăți admite măsura μ'.

Dar G_r este subgrup al lui G și în baza izomorfismului rezultă $H_r \subset H$. Dar, dacă un grup măsurabil G are un subgrup măsurabil atunci invarianții lor integrali sînt egali [79], deci $\mu = \mu'$.

Definiție. Fie în spațiul X^n o varietate cu p dimensiuni V_p. Numim varietăți G_r — echivalente cu V_p, mulțimea tuturor varietăților obținute din aceasta prin transformări ale grupului G_r.

Scanned with OKEN Scanner

§1.4. FAMILII DE VARIETĂȚI MĂSURABILE DIN PLANUL EUCLIDIAN

Fie R_2 planul euclidian de coordonate carteziene ortogonale x^1, x^2. Grupul de mișcări ale planului este grupul G_3 al transformărilor ortogonale, definit de operatorii [98]

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_3 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1}. \tag{4.1}$$

Să considerăm în R_2 o familie $\mathfrak{F}_1$ cu un parametru de curbe, de ecuație

$$F(x^1, x^2, \alpha) = 0. \tag{4.2}$$

Grupul maxim de invarianță al familiei $\mathfrak{F}_1$ este $G_r(x) \subseteq G_3$, iar grupul atașat grupului maxim de invarianță este un grup într-o variabilă $H_r(\alpha)$.

O condiție necesară și suficientă pentru ca familia $\mathfrak{F}_1$ să fie măsurabilă este ca $H_r(\alpha)$ să fie măsurabil, deci să fie translația [79]

$$\alpha' = \alpha + a.$$

Rezultă deci, că grupul maxim de invarianță este un subgrup cu un parametru al grupului G_3 și $r = 1$.

Grupul (4.1) are două subgrupuri parametrice,

$$G_1 \equiv [X_1], \quad G_1' \equiv [X_3].$$

Dacă grupul maxim de invarianță este G_1 sistemul (2.7) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial x^2} = 0$$

și are soluția

$$F = F(x^1 - \alpha, x^2).$$

Deci familiile de curbe cu un parametru măsurabile din planul euclidian au ecuația [85]

$$F(x^1 - \alpha, x^2) = 0 \tag{4.3}$$

și au măsura

$$\mu(\mathfrak{Q}) = \int_{\mathfrak{Q}_\alpha} d\alpha. \tag{4.4}$$

Dacă grupul maxim de invarianță este G_1' sistemul (2.7) se scrie

$$-x^2 \frac{\partial E}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

Soluția acestui sistem este

$$F = F\left[(x^1)^2 + (x^2)^2, \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} - \alpha\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Familia de curbe măsurabile are ecuaţia [79]

$$F\left[(x^1)^2+(x^2)^2,\ \arcsin\frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}-\alpha\right]=0. \tag{4.5}$$

Rezultă :

Teorema 4.1. [85] Familiile de curbe, depinzînd de un parametru, măsurabile din planul euclidian pot fi reduse la una din formulele (4.3) sau (4.5) avînd măsura (4.4).

Fie o familie $\mathfrak{F}_2$ cu doi parametri, de ecuaţie

$$F(x^1, x^2, \alpha^1, \alpha^2)=0 \tag{4.6}$$

şi fie $G_r(x) \subseteq G_3$ grupul maxim de invarianţă şi $H_r(\alpha^1, \alpha^2)$ grupul lui ataşat. Familia $\mathfrak{F}_2$ este măsurabilă dacă $H_r(\alpha^1, \alpha^2)$ este măsurabil, deci în particular, trebuie să fie tranzitiv. Rezultă $2 \leqslant r \leqslant 3$.

Dacă $r=2$ grupul maxim de invarianţă este un subgrup cu doi parametri al grupului (4.1) adică este grupul abelian [79]

$$G_2 \equiv [X_1, X_2].$$

Kerékyártó a demonstrat că grupurile abeliene în două variabile pot fi reduse la forma

$$H_2 \equiv \left[A_1 f=\frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_2 f=\frac{\partial f}{\partial \alpha^2}\right].$$

În acest caz sistemul (2.7) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^2}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0$$

şi are soluţia

$$F=F(x^1-\alpha^1,\ x^2-\alpha^2).$$

Ecuaţia familiei de curbe este

$$F(x^1-\alpha^1,\ x^2-\alpha^2)=0 \tag{4.7}$$

şi are măsura

$$\mu(\mathfrak{Q})=\int_{\mathfrak{Q}_\alpha} d\alpha^1 \wedge d\alpha^2. \tag{4.8}$$

Dacă $r=3$ grupul maxim de invarianţă al familiei $\mathfrak{F}_2$ este (4.1) iar grupul $H_3(\alpha^1, \alpha^2)$ este un grup izomorf cu el, deci de transformări infinitezimale :

[I]
$$A_1 f=\frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_2 f=\frac{\partial f}{\partial \alpha^2},\ A_3 f=-\alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^1}+\alpha^1\frac{\partial f}{\partial \alpha^2}$$

sau

[II]
$$A_1 f=-\cos\alpha^1\frac{\partial f}{\partial \alpha^2},\ A_2 f=-\sin\alpha^1\frac{\partial f}{\partial \alpha^2},\ A_3 f=\frac{\partial f}{\partial \alpha^1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $H_3(\alpha^1, \alpha^2)$ este [I], sistemul (2.7) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0$$

$$-x^2 \frac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial F}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0$$

cu soluția

$$F = F[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2].$$

Deci, familia de curbe măsurabile are ecuația

$$F[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2] = 0 \tag{4.9}$$

adică

$$(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2 = k, \qquad (k = \text{const.})$$

și reprezintă o familie de cercuri de rază constantă. Această familie face parte din familia (4.7).

Dacă $H_3(\alpha^1, \alpha^2)$ este [II], sistemul (2.7) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} - \cos \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} - \sin \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0$$

$$-x^2 \frac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0$$

cu soluția

$$F = F[x^1 \cos \alpha^1 + x^2 \sin \alpha^1 + \alpha^2].$$

Familia de curbe măsurabile are ecuația

$$F[x^1 \cos \alpha^1 + x^2 \sin \alpha^1 + \alpha^2] = 0. \tag{4.10}$$

sau

$$x^1 \cos \alpha^1 + x^2 \sin \alpha^1 + \alpha^2 = k, \qquad (k = \text{const.})$$

reprezentînd familia dreptelor din plan, și are măsura (4.8).

Avem deci:

Teorema 4.2. [86] Singurele familii cu doi parametri măsurabile din planul euclidian sînt familiile de drepte și familiile de curbe (4.7), avînd măsura (4.8).

Scanned with OKEN Scanner

Analog, se poate arăta că, familiile de curbe cu trei parametri măsurabile din planul euclidian pot fi reduse la forma

$$F\,[x^1\cos\gamma + x^2\sin\gamma - \alpha^1,\ x^1\sin\gamma - x^2\cos\gamma - \alpha^2] = 0 \tag{4.11}$$

fiind curbe congruente cu o curbă dată, care nu este dreaptă sau cerc. [79].

§1.5. FAMILII DE VARIETĂȚI MĂSURABILE DIN SPAȚIUL EUCLIDIAN R_3.

Grupul G_6 de mișcări ale acestui spațiu este definit de operatorii:

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i},\ (i = 1, 2, 3), \qquad X_4 f = x^1\frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial f}{\partial x^1}$$

$$X_5 f = x^2\frac{\partial f}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial f}{\partial x^2}, \qquad X_6 f = x^3\frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial f}{\partial x^3}. \tag{5.1}$$

Vom determina formele canonice la care se pot reduce familiile de curbe și suprafețe cu unu și doi parametri, măsurabile din R_3 [87].

Fie o familie $\mathfrak{F}_1$ cu un parametru de suprafețe de ecuație

$$F(x^1, x^2, x^3, \alpha) = 0 \tag{5.2}$$

Dacă $G_r \subseteq G_6$ este grupul maxim de invarianță al familiei (5.2) și $H_r(\alpha)$ este grupul lui atașat față de familia $\mathfrak{F}_1$, pentru ca familia să fie măsurabilă trebuie ca $H_r(\alpha)$ să fie măsurabil, deci să fie o translație

$$\alpha' = \alpha + a.$$

Rezultă că $G_r(x)$ este un subgrup cu un parametru al lui G_6 și are una din formele [79]

$$G_1^1 \equiv [X_1]; \qquad G_1^2 \equiv [X_4]; \qquad G_1^3 \equiv [X_3 + X_4].$$

Dacă $G_r(x)$ este G_1^1, sistemul (2.7) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

și are soluția

$$F = F(x^1 - \alpha,\ x^2,\ x^3)$$

iar ecuația familiei $\mathfrak{F}_1$ este

$$F(x^1 - \alpha,\ x^2,\ x^3) = 0. \tag{5.3}$$

Dacă grupul maxim de invarianță este G_1^2 sistemul se scrie

$$-x^2\frac{\partial F}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

și are soluția

$$F = F[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos \alpha + x^2 \sin \alpha,\ x^3]$$

iar ecuația familiei $\mathfrak{F}_1$ este

$$F[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos \alpha + x^2 \sin \alpha,\ x^3] = 0. \tag{5.4}$$

Dacă grupul maxim de invarianță este G_1^3, sistemul

$$-x^2 \frac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

ne dă ecuația familiei $\mathfrak{F}_1$ în acest caz

$$F[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos x^3 + x^2 \sin x^3,\ x^3 - \alpha] = 0. \tag{5.5}$$

Avem următoarele teoreme [87]:

Teorema 5.1. Familiile de suprafețe cu un parametru măsurabile din spațiul R_3 pot fi reduse la formele (5.3) (5.4) și (5.5) avînd măsura

$$\mu(a) = \int_{a_\alpha} d\alpha. \tag{5.6}$$

Teorema 5.2. Familiile de curbe cu un parametru măsurabile din spațiul R_3 pot fi reduse la formele:

$$\begin{cases} F^1(x^1 - \alpha,\ x^2,\ x^3) = 0 \\ F^2(x^1 - \alpha,\ x^2,\ x^3) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos \alpha + x^2 \sin \alpha,\ x^3] = 0 \\ F^2[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos \alpha + x^2 \sin \alpha,\ x^3] = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos x^3 + x^2 \sin x^3,\ x^3 - \alpha] = 0 \\ F^2[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^1 \cos x^3 + x^2 \sin x^3,\ x^3 - \alpha] = 0. \end{cases}$$

Fie acum o familie de varietăți $\mathfrak{F}_2$ de ecuație

$$F(x^1,\ x^2,\ x^3,\ \alpha^1,\ \alpha^2) = 0. \tag{5.7}$$

Grupul $H_r(\alpha^1, \alpha^2)$ atașat grupului maxim de invarianță $G_r \subseteq G_6$ este un grup în două variabile. $\mathfrak{F}_2$ este măsurabilă dacă și numai dacă $H_r(\alpha^1, \alpha^2)$ este măsurabil, deci tranzitiv. Rezultă $2 \leqslant r \leqslant 6$.

Dacă $r = 2$, G_2 are una din formele:

$$G_2^1 \equiv [X_1,\ X_2], \qquad G_2^2 \equiv [X_3,\ X_4].$$

Grupul $H_2(\alpha^1, \alpha^2)$ este un grup abelian simplu tranzitiv și B. Kérékyartó a demonstrat că un astfel de grup poate fi redus la forma:

$$H_2 \equiv \left[A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} \right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă grupul maxim de invarianţă al familiei $\mathfrak{F}_2$ este G_2^1 sistemul (2.7) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0$$

şi ne dă ecuaţia familiei de varietăţi

(5.8) $$F(x^1 - \alpha^1,\ x^2 - \alpha^2,\ x^3) = 0.$$

Dacă grupul maxim de invarianţă este G_2^2 un calcul analog ne conduce la ecuaţia familiei de varietăţi.

(5.9) $$F[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^3 - \alpha^1,\ x^1 \cos \alpha^2 + x^2 \sin \alpha^2] = 0.$$

Familiile (5.8) şi (5.9) au măsura

(5.10) $$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} d\alpha^1 \wedge d\alpha^2.$$

Pentru $r = 3$ grupul maxim de invarianţă al familiei $\mathfrak{F}_2$ este un subgrup cu trei parametri al lui G_6 şi are una din formele:

$$G_3^1 \equiv [X_1,\ X_2,\ X_3],\ G_3^2 \equiv [X_1,\ X_2,\ X_4],\ G_3^3 \equiv [X_1,\ X_5,\ X_6].$$

Nu există nici un grup în două variabile izomorf cu G_3^1, [73], deci G_3^1 nu poate fi grup maxim de invarianţă pentru familia $\mathfrak{F}_2$.

Dacă grupul maxim de invarianţă este G_3^2, $H_3(\alpha^1, \alpha^2)$, este definit de operatorii [73]

$$[\mathrm{I}] A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},\ A_3 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} - \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}$$

sau

$$[\mathrm{II}]\ A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_2 f = \operatorname{tg} \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_3 f = \alpha^1 \operatorname{tg} \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}.$$

În cazul [I] sistemul (2.7) conduce la ecuaţia familiei $\mathfrak{F}_2$:

(5.11) $$F[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2,\ x^3] = 0,$$

iar în cazul [II] se obţine ecuaţia familiei

(5.12) $$F[x^1 \cos \alpha^2 + x^2 \sin \alpha^2 - \alpha^1 \cos \alpha^2,\ x^3] = 0$$

Dacă grupul maxim de invarianţă este G_3^3, grupul $H_3(\alpha^1, \alpha^2)$ poate fi redus la forma [73]

$$A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ A_2 f = -\operatorname{tg} \alpha^2 \cos \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \sin \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},$$

$$A_3 f = -\operatorname{tg} \alpha^2 \sin \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - \cos \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

iar sistemul (2.7) conduce la ecuaţia familiei $\mathfrak{F}_2$:

$$F[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2,\ x^1 \cos\alpha^1 \cos\alpha^2 + x^2 \sin\alpha^1 \cos\alpha^2 + x^3 \sin\alpha^2] = 0. \tag{5.13}$$

Din (5.13) fac parte şi familiile de plane care trec prin origine, de ecuaţie

$$x^1 \cos\alpha^1 \cos\alpha^2 + x^2 \sin\alpha^1 \cos\alpha^2 + x^3 \sin\alpha^2 = 0.$$

Dacă $r = 4$, grupul maxim de invarianţă al familiei $\mathfrak{F}_2$ este

$$G_4 \equiv [X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4]$$

iar grupul $H_4(\alpha^1, \alpha^2)$ este definit de operatorii

$$A_1 f = \cos\alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},\ A_2 f = \sin\alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},\ A_3 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},\ A_4 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}.$$

Sistemul (2.7) ne dă ecuaţia familiei $\mathfrak{F}_2$:

$$F[x^1 \cos\alpha^1 + x^2 \sin\alpha^1 + x^3 - \alpha^2] = 0 \tag{5.14}$$

adică

$$x^1 \cos\alpha^1 + x^2 \sin\alpha^1 + x^3 - \alpha^2 = k,\ (k = \text{const.})$$

care reprezintă o familie cu doi parametri de plane.

Grupul ortogonal G_6 nu are nici un subgrup cu cinci parametri, deci familia $\mathfrak{F}_2$ nu poate avea ca grup maxim de invarianţă un grup cu cinci parametri.

Dacă $r = 6$, grupul $H_6(\alpha^1, \alpha^2)$ este un grup în două variabile izomorf cu G_6. Dar în [66] se arată că nu există un astfel de grup, deci G_6 nu poate fi grup maxim de invarianţă pentru $\mathfrak{F}_2$.

Rezultă [87].

Teorema 5.3. Familiile de suprafeţe cu doi parametri măsurabile din spaţiul R_3 pot fi reduse la formele (5.8), (5.9), (5.11), (5.12), (5.13) şi (5.14) şi au măsura (5.10).

Analog se obţine:

Teorema 5.4. Familiile de curbe cu doi parametri măsurabile din spaţiul R_3 pot fi reduse la formele:

$$\begin{cases} F^1(x^1 - \alpha^1,\ x^2 - \alpha^2,\ x^3) = 0 \\ F^2(x^1 - \alpha^1,\ x^2 - \alpha^2,\ x^3) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^3 - \alpha^1,\ x^1 \cos\alpha^2 + x^2 \sin\alpha^2] = 0 \\ F^2[(x^1)^2 + (x^2)^2,\ x^3 - \alpha^1,\ x^1 \cos\alpha^2 + x^2 \sin\alpha^2] = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2,\ x^3] = 0 \\ F^2[(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2,\ x^3] = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} F^1(x^1 \cos\alpha^2 + x^2 \sin\alpha^2 - \alpha^1 \cos\alpha^2,\ x^3) = 0 \\ F^2(x^1 \cos\alpha^2 + x^2 \sin\alpha^2 - \alpha^1 \cos\alpha^2,\ x^3) = 0. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

§1.6. PROBABILITĂȚI GEOMETRICE.

Să presupunem că sistemul lui Deltheil (1.5) admite o soluție unică, abstracție făcînd de un factor constant. Deci dacă $F(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)$ este o funcție invariantă integral și D_0 este o mulțime a corpului borelian $\mathfrak{B}_q$, funcția reală $\nu(D)$ definită pentru orice parte D din corpul borelian $\Sigma = \mathfrak{B}_q \cap D_0$ dată de relația

$$\nu(D) = \int_D |F(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)|\, d\alpha^1 \wedge \ldots \wedge d\alpha^q \tag{6.1}$$

ne furnizează o măsură în sensul arătat anterior. Între submulțimile lui D_0 și submulțimile de figuri ale familiei $\mathfrak{F}_q$ există o corespondență biunivocă, deci putem da definiția următoare:

Definiție. Măsura unei submulțimi de figuri ale familiei $\mathfrak{F}_q$ este egală cu măsura ν a acelei submulțimi D a lui D_0 ale cărei puncte $(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)$ generează submulțimea de figuri din familia considerată.

Definiție. Dată o mulțime $\mathfrak{Q}$ de varietăți, probabilitatea ca o varietate să facă parte din mulțimea $\tilde{\mathfrak{Q}} \subset \mathfrak{Q}$ este

$$P = P(\mathfrak{Q}) = \frac{\mu_{G_r}(\tilde{\mathfrak{Q}})}{\mu_{G_r}(\mathfrak{Q})} = \frac{\nu(D)}{\nu(D_0)} \tag{6.2}$$

și care spre deosebire de măsură, este unic definită.

Am construit astfel cîmpul borelian de probabilitate (D_0, Σ, P).

În concluzie, pentru a rezolva o problemă de probabilități geometrice referitoare la o familie dată de figuri geometrice, se determină invariantul integral corespunzător grupului de transformări considerat, apoi se va determina acea submulțime din spațiul parametrilor ale cărui puncte generează submulțimea de figuri ale familiei de figuri considerate. În general această delimitare se realizează prin anumite condiții de natură analitică impuse figurilor. În sfîrșit se determină raportul (6.2).

§1.7. PROBABILITĂȚI GEOMETRICE ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN R_n.

Mulțimi de puncte. Vom considera în spațiul euclidian de coordonate carteziene ortogonale $x^1, \ldots, x^n$ ca familie de varietăți, mulțimea punctelor $P(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$. Ecuațiile familiei sînt

$$x^i = \alpha^i, \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{7.1}$$

unde α^i, $(i = 1, \ldots, n)$ sînt parametri familiei. Grupul maxim de invarianță al acestei familii este grupul transformărilor ortogonale:

$$x^i = a^i_j x'^j + a^i, \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{7.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde determinantul $|a_j^i|$ este ortogonal. Aplicînd transformările (7.2) familiei (7.1) aceasta devine

$$x'^i = \alpha'^i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.1'}$$

unde

$$\alpha^i = a_j^i \alpha'^j + a^i. \tag{7.3}$$

Acesta este grupul atașat $H_r(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ grupului (7.2) față de familia de varietăți (7.1). Transformările infinitezimale ale acestui grup sînt [79]

$$A_i f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^i}, \quad A_{ij} f = \alpha^i \frac{\partial f}{\partial \alpha^j} - \alpha^j \frac{\partial f}{\partial \alpha^i}, \qquad (i < j,\ i, j = 1, \ldots, n)$$

Sistemul lui Deltheil devine

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

cu soluția

$$F(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = k, \qquad (k = \text{const.}) \tag{7.4}$$

Avînd în vedere faptul că probabilitatea este un raport de două măsuri, putem lua $F = 1$.

Avem

Teorema 7.1. Măsura elementară a mulțimii punctelor din spațiul R_n este $dP = d\alpha^1 \wedge \ldots \wedge d\alpha^n$, sau ținînd seama de (7.1)

$$dP = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{7.5}$$

Sisteme de puncte. Să considerăm ca familie de varietăți mulțimea $\mathfrak{M}$ a sistemelor de h puncte $\{P_1, \ldots, P_h\}$ cu $P_k(\alpha_k^1, \ldots, \alpha_k^n)$, de ecuații

$$x^i = \alpha_k^i, \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, h) \tag{7.6}$$

unde α_k^i sînt parametrii familiei.

Grupul maxim de invarianță al acestei familii este (7.2) care aplicat familiei (7.6) ne dă

$$x'^i = \alpha_k'^i$$

cu

$$\alpha_k'^i = a_j^i \alpha_k'^j + a^i, \qquad (i, j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, h) \tag{7.7}$$

Acest grup are nh variabile și $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri. Dacă $n > 2h - 1$ grupul este tranzitiv, iar dacă $n \leqslant 2h - 1$ este intranzitiv. Transformările infinitezimale ale lui sînt [79]

$$A_i f = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial f}{\partial \alpha_k^i}, \quad A_{ij} f = \sum_{k=1}^{h} \left(\alpha_k^i \frac{\partial f}{\partial \alpha_k^j} - \alpha_k^j \frac{\partial f}{\partial \alpha_k^i} \right), \quad (i < j)$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul lui Deltheil devine:

$$\sum_{k=1}^{h} \frac{\partial F}{\partial \alpha_k^i} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{h} \left(\alpha_k^i \frac{\partial F}{\partial \alpha_k^j} - \alpha_k^j \frac{\partial F}{\partial \alpha_k^i} \right) = 0$$

şi în cazul în care grupul este tranzitiv sistemul are soluţia unică $F = \text{const.}$, iar în cazul în care grupul este intranzitiv sistemul are două soluţii distincte.

Deci, funcţia invariantă integral a grupului (7.7) este $F(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_h^n) = k$, $(k = \text{const.})$

Teorema 7.2. Măsura elementară a mulţimii sistemelor de h puncte din R_n este

$$\text{(7.8)} \qquad dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_h = d\alpha_1^1 \wedge \ldots \wedge d\alpha_1^n \wedge \ldots \wedge d\alpha_h^1 \wedge \ldots \wedge d\alpha_h^n$$

iar măsura mulţimii $\mathfrak{M}$ a sistemelor de h puncte căruia îi corespunde în spaţiul parametrilor R_{nh} domeniul D este

$$\text{(7.9)} \qquad \mu(\mathfrak{M}) = \int_D dx_1^1 \wedge \ldots \wedge dx_1^n \wedge \ldots \wedge dx_h^1 \wedge \ldots \wedge dx_h^n,$$

sau

$$\text{(7.9')} \qquad \mu(\mathfrak{M}) = \int_D dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_h.$$

Dacă vom considera o submulţime de sisteme de puncte $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ care satisfac o proprietate C şi căreia în spaţiul parametrilor îi corespunde domeniul $D_0 \subset D$ probabilitatea acestei submulţimi este

$$\text{(7.10)} \qquad P = \frac{\int_{D_0} dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_h}{\int_D dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_h}.$$

Să presupunem că $P_1, \ldots, P_h$, sînt aleatoare într-un domeniu D din R_n. Avem:

$$D = \Delta \times \Delta \times \ldots \times \Delta = \Delta^h$$

şi

$$\text{(7.11)} \qquad \mu(\mathfrak{M})_1^h = \int_{\Delta^h} dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_h = \left(\int_\Delta dP_1 \right) \ldots \left(\int_\Delta dP_h \right) = V^h.$$

Dacă notăm prin $U = \int_D dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_h$ atunci probabilitatea ca un sistem de h puncte luate la întîmplare în Δ să aibă proprietatea C este

$$\text{(7.12)} \qquad p = \frac{U}{V^h}.$$

Scanned with OKEN Scanner

O metodă diferențială generală pentru determinarea probabilității sistemelor de puncte conduce la sistemul dat de O. Onicescu [54]

$$
\begin{aligned}
& V\frac{dp}{dV} + h(p - p_1) = 0 \\
& \frac{1}{2!}V^2\frac{d^2p}{dV^2} + hV\frac{dp}{dV} + \frac{h(h-1)}{2}(p - p_2) = 0 \qquad (7.13) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \frac{1}{h!}V^h\frac{d^hp}{dV^h} + \frac{1}{(h-1)!}V^{h-1}\frac{d^{h-1}p}{dV^{h-1}} + \ldots + V\frac{dp}{dV} + p - p_h = 0
\end{aligned}
$$

unde p_k este probabilitatea ca sistemul format cu $h - k$ puncte luate în Δ și k puncte pe frontiera lui Δ, să aibă proprietatea C.

Prima ecuație din sistem a fost dată de Crofton [17]

Exemplu [20]. Să se determine probabilitatea ca luînd la întîmplare două puncte P_1 și P_2 independente în interiorul cercului de rază R, distanța dintre ele să fie mai mică decît b.

Probabilitatea cerută este $P = \int_a^b p(x)dx$, unde $p(x)dx$ este probabilitatea ca P_1P_2 să fie cuprins între x și $x + dx$. Dînd lui R creșterea dR avem conform primei relații din (7.13)

$$dp = 2(p_1 - p)\frac{ds}{s} = 4(p_1 - p)\frac{dR}{R}$$

unde p_1dx este probabilitatea ca P_1P_2 să fie cuprins între x și $x + dx$ pentru P_1 fixat pe conturul cercului, deci

$$p_1 = \frac{(\pi - 2\theta)x}{\pi R^2}, \quad x = 2R\sin\theta.$$

Dar pentru x dat avem

$$\frac{dR}{R} + \operatorname{ctg}\theta\, d\theta = 0$$

rezultă

$$dp - 4p\operatorname{ctg}\theta\, d\theta = \frac{16}{x}\left(\frac{2\theta}{x} - 1\right)\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

a cărei integrală generală este

$$p = \frac{8}{\pi x}(\pi - 2\theta)\sin^2\theta - \frac{16}{\pi x}\sin^3\theta\cos\theta + \lambda\sin^4\theta.$$

Pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $p = 0$, deci $\lambda = 0$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$P = \frac{8}{\pi}\int_0^{\beta}(\pi - 2\theta)\sin\theta\cos\theta\,d\theta - \frac{16}{\pi}\int_0^{\beta}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

cu $b = 2R\sin\beta$ dacă $\theta = \beta$, deci

$$P = \frac{\pi b^2 + 2\beta(R^2 - b^2) - (2R^2 + b^2)\sin\beta\cos\beta}{\pi R^2}.$$

Să considerăm variabila aleatoare $f(P_1, \ldots, P_h)$ asociată sistemului de puncte care are o anumită proprietate. Valoarea medie a acestei variabile este

$$E[f] = \frac{1}{V^h}\int_{D_n} f(P_1, \ldots, P_h)\,dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_h. \tag{7.14}$$

Dacă notăm cu m_k valoarea medie a variabilei aleatoare $f(P_1, \ldots, P_h)$ în care $h - k$ puncte sînt luate în domeniul Δ și k puncte pe frontiera lui Δ, printr-un procedeu analog cu cel făcut pentru obținerea sistemului (7.13) se obține sistemul:

$$\begin{aligned}
&V\frac{dm}{dV} + h(m - m_1) = 0\\
&\frac{1}{2!}V^2\frac{d^2m}{dV^2} + hV\frac{dm}{dV} + \frac{h(h-1)}{2}(m - m_2) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{1}{h!}V^h\frac{d^hm}{dV^h} + \frac{1}{(h-1)!}V^{h-1}\frac{d^{h-1}m}{dV^{h-1}} + \ldots + V\frac{dm}{dV} + m - m_h = 0
\end{aligned} \tag{7.15}$$

unde am notat $m = E(f)$.

Exemplu. Fie punctele P_1 și P_2 interioare unui cerc de rază R. Să se determine valoarea medie a variabilei aleatoare $f(P_1, P_2) = \overline{P_1P_2}$.

Formula lui Crofton se scrie

$$dm = 2(m_1 - m)\frac{dS}{S}$$

sau ținînd seama că $S = \pi R^2$

$$dm = 2(m_1 - m)\frac{dR}{R}$$

cu m_1 valoarea medie a variabilei aleatoare $f(P_1, P_2)$ pentru P_1 pe cerc. Luînd cercul de ecuație

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

Scanned with OKEN Scanner

și trecînd la coordonate polare : $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ ecuația cercului se scrie $\rho = 2R \sin \theta$ și

$$m_1 = \frac{\int_D \rho dS}{\int_D dS}$$

D fiind domeniul interior cercului și dS elementul de arie. In coordonate polare $dS = \rho \, d\rho d\theta$, deci

$$m_1 = \frac{1}{\pi R^2} \int_D \rho^2 d\rho \, d\theta = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2R\sin\theta} \rho^2 d\rho = \frac{32R}{9\pi}.$$

Ecuația lui Crofton se scrie

$$dm = -4 \frac{m}{R} dR + \frac{128}{9\pi} dR$$

de unde

$$m = \frac{128\,R}{45\pi} + \frac{c}{R^4}, \quad (c = \text{const}).$$

Pentru $R = 0$, $m = 0$ deci $c = 0$ și [20]

$$m = \frac{128\,R}{45\pi}.$$

Familii de drepte [80] Să considerăm ca familie de varietăți, mulțimea dreptelor de ecuații

(7.16) $$x^k = \alpha_k x^n + p_k, \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

Grupul maxim de invarianță al familiei este (7.2) și care aplicat familiei ne dă :

(7.16') $$x'^k = \alpha'_k x'^n + p'_k, \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

unde

(7.17) $$\begin{cases} \alpha_k = \dfrac{\sum_{l=1}^{n-1} a_k^l \alpha'_l + a_k^n}{\sum_{l=1}^{n} a_n^l \alpha'_l + a_n^n} \\ p_k = \sum_{l=1}^{n-1} (a_k^l - a_n^l \alpha_k) p'_l + a_k - a_n \alpha_k, \end{cases}$$

sînt ecuațiile grupului atașat grupului (7.2) față de familia de varietăți (7.16).

Scanned with OKEN Scanner

Transformările infinitezimale ale acestui grup sînt:

$$A_k f = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \ (k = 1, \ \ldots, \ n-1), \qquad A_n f = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \frac{\partial f}{\partial p_k},$$

$$A_{kl} f = \alpha_k \frac{\partial f}{\partial \alpha_l} - \alpha_l \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} + p_k \frac{\partial f}{\partial p_l} - p \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad (k < l = 1, \ \ldots, \ n-1)$$

$$A_{n+k} f = \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} + \alpha_k \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l \frac{\partial f}{\partial \alpha_l} + p_k \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l \frac{\partial f}{\partial p_l}.$$

Sistemul lui Deltheil

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = 0$$

$$\alpha_l \frac{\partial F}{\partial \alpha_u} - \alpha_u \frac{\partial F}{\partial \alpha_l} = 0, \qquad (u = 2, \ \ldots, \ n-1)$$

$$(1 + \alpha_l^2) \frac{\partial E}{\partial \alpha_l} + \sum_{u=2}^{n-1} \alpha_u \frac{\partial F}{\partial \alpha_u} = -(n+1)\alpha_1 F$$

are soluţia [80]

$$F(\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_{n-1}) = \frac{1}{\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{7.18}$$

Teorema 7.3. Măsura elementară a mulţimii dreptelor din spaţiul euclidian E_n este

$$dG = \frac{dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_{n-1} \wedge d\alpha_1 \wedge \ldots \wedge d\alpha_{n-1}}{\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{7.19}$$

Dacă notăm

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \operatorname{tg} \varphi_1 \sin \varphi_2 \ \ldots \ \sin \varphi_{n-1} \\ \alpha_2 &= \operatorname{tg} \varphi_1 \sin \varphi_2 \ \ldots \ \cos \varphi_{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n &= \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{aligned}$$

măsura (7.19) devine

$$dG = |\cos \varphi_1| \, dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_{n-1} \wedge dO_{n-1} \tag{7.20}$$

unde

$$dO_{n-1} = |\sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \ \ldots \ \sin \varphi_{n-2}| \, d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_{n-1}$$

este elementul de arie pe sfera unitate $n-1$-dimensională. Avem: [80]

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 7.4. Măsura elementară a familiei de drepte de ecuaţie

(7.21)
$$\frac{x^1 - p_1}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \dots \sin\varphi_{n-1}} = \frac{x^2 - p_2}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \dots \cos\varphi_{n-1}} = \dots = \frac{x^{n-1} - p_{n-1}}{\sin\varphi_1 \cos\varphi_2} = \frac{x^n}{\cos\varphi_1}$$

invariantă în raport cu grupul (7.2) de deplasări euclidiene, este (7.20).

Fie în hiperplanul $x^n = 0$ un domeniu $n-1$-dimensional D, de volum $V_{n-1}(D)$. Să determinăm măsura mulţimii dreptelor care intersectează domeniul D. Această măsură este [80]

$$\mu = \int_{\{G \cap D \neq \emptyset\}} dG = \int_{\{P(p_1,\dots,p_{n-1}) \in D\}} dp_1 \wedge \dots \wedge dp_{n-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \int_0^{\pi} \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-2} \dots$$

(7.22)
$$\dots \int_0^{\pi} \sin^{n-3}\varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\varphi_1 \cos\varphi_1\, d\varphi_1 = \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} V_{n-1}(D).$$

Pentru un corp n-dimensional $\Sigma^{(n)}$ de frontieră $\partial\Sigma^{(n)}$ şi avînd volumul frontierei $V_{n-1}(\partial\Sigma^{(n)})$ printr-un procedeu de trecere la limită se obţine

(7.23)
$$\int_{\{G \cap \Sigma^{(n)} \neq \emptyset\}} m\,dG = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} V_{n-1}(\partial\Sigma^{(n)})$$

unde m reprezintă numărul de puncte de intersecţie între G şi $\Sigma^{(n)}$. Dacă $\Sigma^{(n)}$ este un corp convex $K^{(n)}$, $m = 2$ şi (7.23) devine

(7.23′)
$$\int_{\{G \cap K^{(n)} \neq \emptyset\}} dG = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} V_{n-1}(\partial K^{(n)})$$

Rezultă de aici că posibilitatea ca o dreaptă care intersectează corpul $K^{(n)}$ să intersecteze şi corpul convex $K_1^{(n)} \subset K^{(n)}$ este

(7.24)
$$P = \frac{V_{n-1}(\partial K_1^{(n)})}{V_{n-1}(\partial K^{(n)})}.$$

Perechi de puncte. Fie $P_1(x_1^1, \dots, x_1^n)$ şi $P_2(x_2^1, \dots, x_2^n)$ două puncte din spaţiul euclidian R_n. Măsura elementară a mulţimii perechilor de puncte este conform (7.8).

(7.8′)
$$dP_1 \wedge dP_2 = dx_1^1 \wedge \dots \wedge dx_1^n \wedge dx_2^1 \wedge \dots \wedge dx_2^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

În [75] se dă o altă formă acestei măsuri și anume : fie G dreapta care trece prin P_1 și P_2 de ecuație (7.21) și O^* proiecția ortogonală a originii O pe G. Dacă notăm cu t_1 și t_2 distanțele între P_1 și respectiv P_2 și O^* avem :

$$
\begin{aligned}
x_j^1 &= p_1(1-\rho_1^2) - p_2\rho_1\rho_2 - \ldots - p_{n-1}\rho_1\rho_{n-1} - t_j\rho_1 \\
x_j^2 &= p_1\rho_1\rho_2 - p_2(1-\rho_2^2) - \ldots - p_{n-1}\rho_2\rho_{n-1} - t_j\rho_2, \quad (j=1,\ 2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_j^{n-1} &= -p_1\rho_1\rho_{n-1} - p_2\rho_2\rho_{n-1} - \ldots - p_{n-1}(1-\rho_{n-1}^2) - t_j\rho_{n-1} \\
x_j^{n-2} &= -p_1\rho_1\rho_n - p_2\rho_2\rho_n - \ldots - p_{n-1}\rho_{n-1}\rho_n - t_j\rho_n
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

unde s-au făcut notațiile :

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-1} \\
\rho_2 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \cos\varphi_{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\rho_{n-1} &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\
\rho_n &= \cos\varphi_1
\end{aligned}
\tag{7.26}
$$

Cu acestea relația (7.8′) devine

$$
dP_1 \wedge dP_2 = |t_1 - t_2|^{n-1} dG \wedge dt_1 \wedge dt_2. \tag{7.27}
$$

Dacă notăm cu α și β distanțele între punctele de intersecție a lui G cu $\partial K^{(n)}$ și O^* avem

$$
I = \int_{\{P_1,P_2\in K^{(n)}\}} dP_1 \wedge dP_2 = \int_{\{P_1\in K^{(n)}\}} dP_1 \int_{\{P_2\in K^{(n)}\}} dP_2 = V_n^2(K^{(n)}) \tag{7.28}
$$

și

$$
I = \int_{\{G\cap K^{(n)}\neq\emptyset\}} dG \int_\alpha^\beta dt_1 \int_\alpha^\beta |t_1 - t_2|^{n-1} dt_2 = \frac{2}{n(n+1)} \int_{\{G\cap K^{(n)}\neq\emptyset\}} \lambda^{n+1} dG \tag{7.28′}
$$

unde $\lambda = \beta - \alpha$, este lungimea segmentului interceptat de $K^{(n)}$ pe G.

Egalînd aceste valori avem

$$
\int_{\{G\cap K^{(n)}\neq\emptyset\}} \lambda^{n+1} dG = \frac{n(n+1)}{2} V_n^2(K^{(n)}). \tag{7.29}
$$

Din (7.23′) și (7.29) rezultă valoarea medie

$$
E[\lambda^{n+1}] = \frac{n(n^2-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}} \frac{V_n^2(K^{(n)})}{V_n(\partial K^{(n)})}. \tag{7.30}
$$

Scanned with OKEN Scanner

Perechi de drepte. Fie familia perechilor de drepte concurente de ecuație

$$(G_1): x^k = \alpha_k(x^n - p_n) + p_k \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

$$(G_2): x^k = \beta_k(x^n - p_n) + p_k,$$

și $P(p_1, \ldots, p_n)$ punctul lor de intersecție. În [80] se arată că măsura mulțimii perechilor de drepte concurente invariantă în raport cu grupul (7.2) de mișcări euclidiene este

$$(7.31) \qquad \frac{dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n \wedge d\alpha_1 \wedge \ldots \wedge d\alpha_n \wedge d\beta_1 \wedge \ldots \wedge d\beta_n}{\left(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2 + 1\right)^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k^2 + 1\right)^{\frac{n}{2}}}$$

sau

$$(7.31') \qquad dP \wedge dO_{n-1}^{(1)} \wedge dO_{n-1}^{(2)}$$

cu $dP = dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n$, iar $dO_{n-1}^{(i)} (i = 1, 2)$ este elementul de arie pe sfera unitate $(n-1)$ -dimensională.

Fie un corp $K^{(n)}$ de volum $V_n(K^{(n)})$ din spațiul euclidian R_n și $\mathfrak{M}$ mulțimea perechilor de drepte concurente care se intersectează în interiorul lui $K^{(n)}$. Măsura acestei mulțimi este

$$(7.32) \qquad \mu(\mathfrak{M}) = \int_{\{P \in K^{(n)}\}} dP \left(\int_{S_{n-1}} dO_{n-1} \right)^2 = \frac{O_{n-1}^2}{4} V_n(K^{(n)}) = \frac{\pi^n}{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2} V_n(K^{(n)})$$

Familii de hiperplane [75] Să considerăm ca familie de varietăți mulțimea hiperplanelor H de ecuație

$$(7.33) \qquad \rho_1 x^1 + \rho_2 x^2 + \ldots + \rho_n x^n - p = 0$$

cu

$$(7.34) \qquad u_1 x^1 + \ldots + u_n x^n + 1 = 0, \quad u_i = -\frac{\rho_i}{p}.$$

Grupul maxim de invarianță al acestei familii este (7.2) care aplicat familiei ne dă

$$u_1' x'^1 + \ldots + u_n' x'^n + 1 = 0$$

cu

$$(7.35) \qquad u_i' = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j u_j}{\sum_{j=1}^{n} a_j u_j + 1}, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Acestea sînt ecuaţiile grupului ataşat grupului maxim de invarianţă faţă de familia (7.33).

Transformările infinitezimale ale grupului (7.35) sînt [75]

$$A_i f = u_i \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial f}{\partial u_j}, \quad A_{ij} f = u_j \frac{\partial f}{\partial u_i} - u_i \frac{\partial f}{\partial u_j}, \qquad (i < j = 1, \ldots, n)$$

iar sistemul lui Deltheil:

$$u_1 \frac{\partial F}{\partial u_l} - u_l \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0, \qquad (l = 2, \ldots, n)$$

$$u_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + \ldots + u_n \frac{\partial F}{\partial u_n} = -(n+1)F$$

are soluţia

$$F(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{[u_1^2 + \ldots + u_n^2]^{\frac{n+1}{2}}} \tag{7.36}$$

Teorema 7.5. Măsura elementară a mulţimii hiperplanelor (7.31) invariantă în raport cu grupul (7.2) de deplasări euclidiene este

$$dH = \frac{du_1 \wedge \ldots \wedge du_n}{[u_1^2 + \ldots + u_n^2]^{\frac{n+1}{2}}} \tag{7.37}$$

sau

$$dH = dp \wedge dO_{n-1}. \tag{7.38}$$

Să determinăm măsura mulţimii hiperplanelor care intersectează un segment de lungime l. Presupunem segmentul situat pe axa Ox^n (deoarece dH este invariantă în raport cu grupul (7.2)). Măsura căutată este [75]

$$\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \int_0^{\pi} \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \ldots \int_0^{\pi} \sin^{n-3}\varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1 \int_0^{l\cos\varphi_1} dp =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} l}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \tag{7.39}$$

Fie (Γ) un arc de curbă rectificabilă de lungime L şi fie m numărul de puncte de intersecţie dintre H şi (Γ). Printr-un procedeu de trecere la limită se obţine:

$$\int_{(H \cap \Gamma \neq \emptyset)} m dH = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} L. \tag{7.40}$$

Fie $K^{(n)}$ un corp convex de volum $V_n(K^{(n)})$ și un hiperplan H care intersectează $K^{(n)}$; și σ volumul $n-1$-dimensional al lui $H \cap K^{(n)}$, avem

$$\int_{\{H \cap K^{(n)} \neq O\}} \sigma \mathrm{d}H = \int_{O_{n-1}^*} \mathrm{d}O_{n-1} \int_{a_1}^{a_2} \sigma \mathrm{d}p$$

unde O_{n-1}^* este semisfera unitate $n-1$-dimensională iar a_1 și a_2, distanțele de la O la hiperplanele tangente la $K^{(n)}$ ortogonale direcției $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$.

Avem

$$\int_{a_1}^{a_2} \sigma \mathrm{d}p = V_n(K^{(n)})$$

deci

$$\int_{\{H \cap K^{(n)} \neq \emptyset\}} \sigma \mathrm{d}H = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} V_n(K^{(n)}) \tag{7.41}$$

Fie G o dreaptă și P punctul de intersecție a lui G cu H. Să calculăm în două moduri integrala

$$I = \int_{\{P \in K^{(n)}\}} \mathrm{d}G \wedge \mathrm{d}H.$$

Ținînd seama de (7.22) și (7.39) avem

$$I = \int_{\{H \cap K^{(n)} \neq O\}} \mathrm{d}H \int_{\{G \cap (H \cap K^{(n)}) \neq \emptyset\}} \mathrm{d}G = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\{H \cap K^{(n)} \neq \emptyset\}} \sigma \mathrm{d}H = \frac{(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!} V_n(K^{(n)})$$

Notînd cu G^k coarda determinată de $\partial K^{(n)}$ pe G și prin λ lungimea ei, ținînd seama de (7.37) avem:

$$I = \int_{\{G \cap K^{(n)} \neq O\}} \mathrm{d}G \int_{\{H \cap G^k \neq O\}} \mathrm{d}H = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\{G \cap K^{(n)} \neq \emptyset\}} \lambda \, \mathrm{d}G$$

Egalînd cele două expresii rezultă

$$\int_{\{G \cap K^{(n)} \neq O\}} \lambda \mathrm{d}G = \frac{O_{n-1}}{2} V_n(K^{(n)}). \tag{7.42}$$

Scanned with OKEN Scanner

și valoarea medie

$$E[\lambda] = \frac{(n-1)\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{V_n(K^{(n)})}{V_{n-1}(\partial K^{(n)})}.$$

Rezultă din cele demonstrate că: probabilitatea ca o dreaptă oarecare și un hiperplan oarecare să se intersecteze în interiorul unui corp convex este [75]

$$P = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}\, V_n(K^{(n)})}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) V_{n-1}(\partial K^{(n)})\, M_{n-2}(K^{(n)})}$$

unde

$$M_{n-2}(K^{(n)}) = \int_{\{H \cap K^{(n)} \neq \emptyset\}} dH.$$

§1.8. PROBABILITĂȚI GEOMETRICE ÎN R_2 ȘI R_3.

Fie în planul euclidian R_2 o familie de drepte de ecuație

(8.1) $$ux + vy + 1 = 0.$$

Grupul maxim de invarianță al familiei este grupul transformărilor ortogonale

(8.2) $$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta + x_0$$
$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta + y_0.$$

Măsura elementară a mulțimii dreptelor din planul euclidian R_2 invariantă în raport cu grupul de mișcări (8.2) este

(8.3) $$dG = \frac{du \wedge dv}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

iar dacă scriem ecuația dreptei sub formă normală

(8.1′) $$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$$

avem

(8.3′) $$dG = dp \wedge d\varphi.$$

Fie un segment de dreaptă de lungime l. Să determinăm măsura mulțimii dreptelor din plan care intersectează acest segment. Luăm segmentul pe axa Ox, (OA) și punînd condiția ca dreapta (8.1′) să intersecteze segmentul avem

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant p \leqslant l\cos\varphi$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\mu = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{l\cos\varphi} dp = 2l. \tag{8.4}$$

Rezultă

Teorema 8.1. Măsura mulţimii dreptelor din plan care intersectează un segment de dreaptă este egală cu dublul lungimii segmentului.

Fie (Γ) o curbă convexă închisă de lungime l de ecuaţii parametrice

$$x = x(s), \qquad y = y(s).$$

Să determinăm măsura mulţimii dreptelor din plan care intersectează curba (Γ). Fie $P(x, y)$ punctul de intersecţie a dreptei (8.1′) cu (Γ), θ unghiul dreptei cu tangenta la curbă în P şi α unghiul tangentei cu Ox. Avem

$$\varphi = \alpha - \theta + \frac{\pi}{2}, \quad dx = \cos\alpha\, ds, \quad dy = \sin\alpha\, ds$$

Rezultă

$$dG = |\sin\theta|\, ds \wedge d\theta. \tag{8.3''}$$

Notînd cu n numărul de puncte de intersecţie ale unei drepte din plan cu (Γ) formula lui Crofton ne dă

$$\int_{\{G \cap \Gamma \neq \emptyset\}} n\,dG = \int_0^l ds \int_0^{\pi} |\sin\theta|\, d\theta = 2l. \tag{8.5}$$

Dacă curba este convexă $n = 2$. Rezultă

Teorema 8.2. Măsura mulţimii dreptelor din plan care intersectează o curbă convexă este egală cu lungimea curbei.

Fie (Γ_1) o curbă închisă convexă de lungime l_1 interioară curbei închisă convexă (Γ). Ţinînd seama de (8.4) şi (8.5) obţinem valoarea medie a numărului de puncte de intersecţie a unei drepte cu (Γ_1):

$$E[n] = \frac{\int n\,dG}{\int dG} = \frac{2l_1}{l}. \tag{8.6}$$

Fie (Γ_1) şi (Γ_2) două curbe convexe închise de lungimi l_1 şi l_2. Să determinăm probabilitatea ca o secantă oarecare a curbei (Γ_1) să intersecteze şi curba (Γ_2).

Dacă (Γ_2) este interioară curbei (Γ_1) ţinînd seama de teorema anterioară avem

$$P = \frac{l_2}{l_1}. \tag{8.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă curbele (Γ_1) şi (Γ_2) sînt exterioare una alteia, ţinînd seama de formula lui J. J. Sylvester [84]

$$l_{12} = l_i - l_e$$

unde l_{12} este măsura mulţimii secantelor comune a curbelor (Γ_1) şi (Γ_2), $l_e = l_1 + l_2 + l_{12} + l_0$ este măsura mulţimii secantelor curbei (Γ_e) şi $l_i = l_1 + l_2 + 2l_{12} + l_0$ măsura mulţimii secantelor curbei (Γ_i) unde $\Gamma_e = BMAA'M'B'B$ $\Gamma_i = CBMADD'B'M'A'C'C$ şi l_0 este măsura mulţimii dreptelor care intersectează tangentele exterioare la curbele (Γ_1) şi (Γ_2), fig. (1.8.1) avem

(8.8) $$P = \frac{l_i - l_e}{l_1}.$$

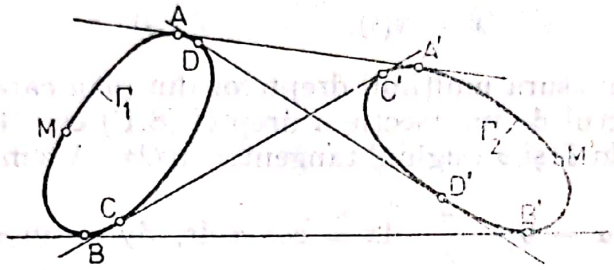

Fig. 1.8.1

În cazul în care cele două curbe se intersectează avem $l_{12} = l_1 + l_2 - l_e$

(8.9) $$P = \frac{l_1 + l_2 - l_e}{l_1}.$$

Să considerăm acum ca familii de varietăţi din R_2, mulţimea *perechilor de puncte* P_1, P_2. Măsura elementară a acestei familii invariantă la grupul transformărilor ortogonale este

(8.10) $$dP_1 \wedge dP_2 = dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2$$

sau ţinînd seama de (7.27)

(8.10') $$dP_1 \wedge dP_2 = |t_2 - t_1|\, dG \wedge dt_1 \wedge dt_2.$$

Fie (Γ) o curbă convexă care mărgineşte aria S şi λ lungimea coardei determinată pe (Γ) de o dreaptă G. Notînd cu a şi b valorile lui t corespunzătoare extremităţilor P_1 şi P_2 ale segmentului λ avem:

$$I = \int dP_1 \wedge dP_2 = \int dP_1 \int dP_2 = S^2,$$

integrală extinsă la mulţimea perechilor de puncte situate pe (Γ) şi în interiorul ei, şi

$$I = \int dP_1 \wedge dP_2 = \int dG \wedge dt_1 \left[\int_{t_1}^{b} (t_2 - t_1)dt_2 + \int_{a}^{t_1} (t_1 - t_2)dt_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int dG \int_a^b [(b - t_1)^2 + (t_1 - a)^2]dt_1 = \frac{1}{3} \int (b - a)^3 dG = \frac{1}{3} \int \lambda^3 dG.$$

integrală extinsă la toate poziţiile dreptei care intersectează (Γ).

Rezultă

$$\int_{\{G\cap\Gamma\neq\emptyset\}} \lambda^3\, dG = 3S^2 \tag{8.11}$$

formula integrală a lui Crofton [15].

Valoarea medie a puterii a treia a lungimii coardei determinate de (Γ) pe dreaptă este

$$E[\lambda^3] = \frac{3S^2}{l}. \tag{8.12}$$

Să considerăm o pereche de drepte (d_1) și (d_2) luate la întîmplare în plan, de ecuații:

$$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1 = 0$$

$$x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - p_2 = 0.$$

Măsura elementară a mulțimii perechilor de drepte invariantă în raport cu grupul transformărilor ortogonale este

$$dG_1 \wedge dG_2 = dp_1 \wedge d\varphi_1 \wedge dp_2 \wedge d\varphi_2. \tag{8.13}$$

Fie o curbă închisă convexă (Γ) de lungime L.

Teorema 8.3. Măsura mulțimii $\mathfrak{M}$ a perechilor de drepte care intersectează pe (Γ) este

$$\mu(\mathfrak{M}) = \frac{L^2}{2}. \tag{8.14}$$

Într-adevăr

$$\mu(\mathfrak{M}) = \frac{1}{2}\int_D dp_1 \wedge d\varphi_1 \wedge dp_2 \wedge d\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\int_{D_1} dp_1 \wedge d\varphi_1\right)\left(\int_{D_2} dp_2 \wedge d\varphi_2\right) = \frac{L^2}{2}$$

unde D_1 și D_2 sînt domeniile din planul (p, φ) pentru care (d_1) și (d_2) intersectează pe (Γ) (fiecare pereche de drepte este luată de două ori).

Din

$$p_1 = x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1$$

$$p_2 = x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2$$

ținînd seama de

$$\frac{D(p_1, p_2)}{D(x, y)} = \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \text{ rezultă}$$

$$dG_1 \wedge dG_2 = |\sin(\varphi_2 - \varphi_1)|\, dx \wedge dy \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \tag{8.15}$$

unde x și y sînt coordonatele punctului de intersecție al dreptelor (d_1) și (d_2).

Scanned with OKEN Scanner

Teorema lui Crofton. Măsura mulțimii perechilor de drepte care se intersectează în exteriorul curbei închise convexe (Γ) este

$$\int_D (\alpha - \sin \alpha)\, dx \wedge dy = \frac{L^2}{2} - \pi S, \tag{8.16}$$

α fiind unghiul dintre tangentele la (Γ) duse din punctul M oarecare, exterior curbei.

Pentru demonstrație vezi [79].

De aici și din (8.14) rezultă: probabilitatea ca două secante oarecare ale curbei convexe închise (Γ) de lungime L și arie S să se intersecteze în interiorul curbei într-un punct este

$$P = \frac{2\pi S}{L^2}. \tag{8.17}$$

Să considerăm în spațiul euclidian R_3 familia dreptelor de ecuație

$$x = az + p$$
$$y = bz + q.$$

Măsura elementară a mulțimii dreptelor din spațiu invariantă la grupul transformărilor ortogonale este

$$dG = \frac{da \wedge db \wedge dp \wedge dq}{(a^2 + b^2 + 1)^2} \tag{8.18}$$

Notînd cu θ unghiul dreptei cu Oz și φ unghiul făcut de proiecția dreptei pe xOy cu Ox avem:

$$a = \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \theta, \qquad b = \sin \varphi \operatorname{tg} \theta$$

și

$$dG = |\sin \theta \cos \theta|\, dp \wedge dq \wedge d\varphi \wedge d\theta \tag{8.18'}$$

sau [20]

$$dG = |\cos \theta|\, dx \wedge dy \wedge d\Omega. \tag{8.18''}$$

Fie domeniul D de arie S din planul xOy. Măsura mulțimii dreptelor care intersectează domeniul D este

$$\mu = \int_{\{G \cap D \neq \emptyset\}} dG = \int_{P(x,y) \in D} dx \wedge dy \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos \theta \sin \theta|\, d\varphi \wedge d\theta = \pi S. \tag{8.19}$$

Fie (Σ) o suprafață de arie S și n numărul de puncte în care o dreaptă oarecare intersectează (Σ). Avem

$$\int_{\{G \cap \Sigma \neq \emptyset\}} n\, dG = \pi S. \tag{8.20}$$

Dacă suprafaţa este închisă convexă $n = 2$, şi

$$\int_{\{G \cap \Sigma \neq \emptyset\}} dG = \frac{\pi S}{2} . \tag{8.21}$$

Rezultă de aici:

Teorema 8.4. Probabilitatea ca o dreaptă care intersectează suprafaţa închisă convexă (Σ) de arie S să intersecteze şi suprafaţa închisă convexă (Σ_1) de arie S_1 interioară lui (Σ) este

$$P = \frac{S_1}{S} \tag{8.22}$$

Am văzut că măsura elementară a mulţimii perechilor de puncte $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ invariantă la grupul transformărilor ortogonale este

$$dP_1 \wedge dP_2 = dx_1 \wedge dy_1 \wedge dz_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \wedge dz_2 \tag{8.23}$$

sau

$$dP_1 \wedge dP_2 = |t_1 - t_2|^2 dG \wedge dt_1 \wedge dt_2. \tag{8.23'}$$

Măsura mulţimii perechilor de puncte, situate în interiorul şi pe o suprafaţă închisă convexă (Σ) care mărgineşte volumul V este

$$\mu(\mathfrak{M}) = \int_D dP_1 \wedge dP_2 = \int_\Delta dP_1 \int_\Delta dP_2 = V^2. \tag{8.24}$$

Fie λ lungimea coardei determinată de (Σ) pe o dreaptă oarecare G. Notînd cu a şi b distanţele de la proiecţia originii sistemului de axe pe G, la punctele de intersecţie cu (Σ) avem

$$\mu(\mathfrak{M}) = \int_{\{G \cap \Sigma \neq \emptyset\}} dG \int_a^b dt_2 \int_a^b (t_1 - t_2)^2 dt_1 = \frac{1}{6} \int_{\{G \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \lambda^4 dG$$

şi ţinînd seama de (8.24)

$$\int_{\{G \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \lambda^4 \, dG = 6V^2. \tag{8.25}$$

Rezultă că valoarea medie a variabilei aleatoare λ^4 este

$$E[\lambda^4] = \frac{\int_{\{G \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \lambda^4 dG}{\int_{(G.} dG} = \frac{12V^2}{\pi S} . \tag{8.26}$$

Fie în R_3 *familia planelor* de ecuaţie

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Măsura elementară a mulțimii planelor din spațiu invariantă la grupul transformărilor ortogonale este [20]

$$dE = \frac{du \wedge dv \wedge dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2} \tag{8.27}$$

sau scriind ecuația planului sub formă normală

$$x \sin\theta \cos\varphi + y \sin\theta \sin\varphi + z \cos\theta - p = 0$$

avem

$$dE = |\sin\theta|\, dp \wedge d\varphi \wedge d\theta. \tag{8.27'}$$

Teorema 8.5. Măsura elementară a mulțimii planelor care intersectează un segment de lungime l este πl.

Într-adevăr, considerînd segmentul OA cu A $(0, 0, l)$ avem

$$\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{l\cos\theta} dp = \pi l. \tag{8.28}$$

Fie (Γ) un arc de curbă rectificabilă de lungime L și n numărul de puncte de intersecție a unui plan cu (Γ). Avem:

$$\int_{\{E \cap \Gamma \neq \emptyset\}} n\, dE = \pi L. \tag{8.29}$$

Dacă (Γ) este închisă convexă, $n = 2$ și

$$\int_{\{E \cap \Gamma \neq \emptyset\}} dE = \frac{\pi}{2} L. \tag{8.30}$$

E. Barbier a considerat mulțimea planelor care intersectează o porțiune de suprafață dată (Σ) de arie S și notînd cu λ lungimea curbei de intersecție a suprafeței (Σ) cu planul (E) obține:

$$\int_{\{E \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \lambda\, dE = \frac{\pi^2}{2} S. \tag{8.31}$$

Teorema lui Minkowski. [51] Măsura mulțimii planelor care intersectează o suprafață închisă convexă (Σ) analitică este:

$$\mu = \int_{\Sigma_0} p\, d\Omega = \int_{\Sigma} H\, d\sigma \tag{8.32}$$

unde $p(\theta, \varphi)$ este funcția de sprijin a suprafeței, (Σ_0) este sfera unitate cu centrul în origine, $d\Omega = |\sin\theta| d\varphi \wedge d\theta$, $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$ (curbura medie a lui (Σ)) și $d\sigma$ elementul de arie pe (Σ).

Dacă (Σ) este un ovaloid, notînd cu σ aria secțiunii determinate de (Σ) pe (E), E. Czuber obține [18]

$$\int_{\{E \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \sigma\, dE = 2\pi V. \tag{8.33}$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 2

MĂSURA CINEMATICĂ

§2.1. MĂSURĂ CINEMATICĂ

Fie în spaţiul X^n de coordonate $x^1, \ldots, x^n$ o varietate cu p dimensiuni V_p şi G_r grupul maxim de invarianţă al familiei $\mathfrak{V}$ de varietăţi G_r-echivalente cu V_p. Dacă ecuaţiile grupului G_r sînt

$$y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^r) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

şi V_p are ecuaţiile

$$F^\lambda(x^1, \ldots, x^n) = 0, \quad (\lambda = 1, \ldots, n - p) \tag{1.2}$$

ecuaţiile familiei sînt

$$F^\lambda[f^1(x, \alpha), \quad , f^n(x, \alpha)] = 0 \tag{1.3}$$

Dacă aplicăm grupul G_r familiei (1.3) obţinem

$$F^\lambda[f^1(f(x, a), \alpha), \ldots, f^n(f(x, a), \alpha)] = F^\lambda[f^1(x, \gamma), \ldots, f^n(x, \gamma)]$$

unde

$$\gamma^k = \varphi^k(a^1, \ldots, a^r, \alpha^1, \ldots, \alpha^r), \quad (k = 1, \ldots, r) \tag{1.4}$$

sînt ecuaţiile celui de al doilea grup parametric al grupului G_r, notat π'_r* şi care este grupul ataşat grupului maxim de invarianţă G_r faţă de familia $\mathfrak{V}$.

Definiţie. Familia de varietăţi $\mathfrak{V}$ este măsurabilă şi are ca măsură, măsura cinematică a grupului G_r care este măsura celui de al doilea grup parametric π'_r. Dacă $\Psi(\alpha^1, \ldots, \alpha^r)$ este funcţia invariantă integral a grupului π'_r, măsura cinematică va fi

$$\int \Psi(\alpha^1, \ldots, \alpha^r) d\alpha^1 \wedge \ldots \wedge d\alpha^r. \tag{1.6}$$

---

* Dacă vom scrie că produsul a două transformări din G_r aparţine grupului, obţinem

$$f^i[f'(x, \alpha), \ldots, f^n(x, \alpha), a^1, \ldots, a^r] = f^i(x, \beta) \tag{1.5}$$

unde

$$\beta^k = \varphi^k(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, a^1, \ldots, a^r), \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

sînt ecuaţiile primului grup parametric al grupului G_r, notat π_r.

Scanned with OKEN Scanner

§2.2. MĂSURĂ CINEMATICĂ ÎN SPAȚIILE EUCLIDIENE R_2, R_3 ȘI R_n

Fie în planul euclidian R_2 mulțimea tuturor figurilor congruente cu o figură (K). Această mulțime este măsurabilă și are ca măsură, măsura cinematică a grupului transformărilor ortogonale din plan.

Dacă ecuațiile grupului transformărilor ortogonale sînt

$$\begin{aligned} X &= X' \cos \varphi - Y' \sin \varphi + x \\ Y &= X' \sin \varphi + Y' \cos \varphi + y \end{aligned} \tag{2.1}$$

grupul parametric π' are ecuațiile

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi_1 - y' \sin \varphi_1 + x_1 \\ y &= x' \sin \varphi_1 + y' \cos \varphi_1 + y_1 \\ \varphi &= \varphi' + \varphi_1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

iar funcția invariantă integral a acestui grup este

$$\Psi(x, y, \varphi) = 1.$$

Deci, măsura cinematică în plan este [57]:

$$\mu = \int dx \wedge dy \wedge d\varphi. \tag{2.3}$$

Definiție. Expresia diferențială

$$dK = dx \wedge dy \wedge d\varphi \tag{2.4}$$

se numește măsură elementară cinematică în plan.

O altă expresie a măsurii elementare cinematice este dată de L. A. Santaló [60].

Fie punctul $P(x, y)$ și dreapta (G) care trece prin P și face cu Ox unghiul φ. Notînd cu p distanța de la originea axelor de coordonate la (G), cu θ unghiul dintre Ox și normala la (G) și cu t distanța de la proiecția lui O pe (G) la P, avem

$$\begin{aligned} x &= p \cos \theta + t \sin \theta \\ y &= p \sin \theta - t \cos \theta \\ \varphi &= \theta - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

de unde

$$dx \wedge dy \wedge d\varphi = dp \wedge d\theta \wedge dt$$

sau, ținînd seama de notația $dG = dp \wedge d\theta$

$$dK = dG \wedge dt \tag{2.5}$$

dacă orientarea figurii nu intervine, sau

$$dK = \frac{1}{2} d\vec{G} \wedge dt \tag{2.6}$$

dacă (G) este dreapta orientată.

Scanned with OKEN Scanner

Fie în spaţiul euclidian R_3 o figură (K) şi $\mathfrak{M}$ mulţimea tuturor figurilor congruente cu (K). Măsura acestei mulţimi este măsura cinematică a grupului transformărilor ortogonale din R_3. Ecuaţiile grupului transformărilor ortogonale sînt

$$x_i' = \lambda_i^j x_j + \alpha_i, \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.7}$$

cu $\lambda_i^j \lambda_k^i = \delta_k^j$

Dacă ecuaţia suprafeţei care mărgineşte corpul (K) este $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ ecuaţia familiei $\mathfrak{M}$ va fi

$$F(\nu_1^j x_j + \alpha_1,\ \nu_2^j x_j + \alpha_2,\ \nu_3^j x_j + \alpha_3) = 0,\ (j = 1, 2, 3)$$

Dacă notăm cu θ, φ, ψ unghiurile lui Euler avem:

$\nu_1^1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta$; $\nu_1^2 = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta$;

$\nu_1^3 = \sin\psi\sin\theta$; $\nu_2^1 = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta$;

$\nu_2^2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta$; $\nu_2^3 = \cos\psi\sin\theta$;

$\nu_3^1 = \sin\varphi\sin\theta$; $\nu_3^2 = -\cos\varphi\sin\theta$; $\nu_3^3 = \cos\theta$;

deci parametrii familiei sînt $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta, \varphi, \psi$.

Aplicînd familiei grupul (2.7) obţinem

$$F(\lambda_1'^j x_j' + \alpha_1',\ \lambda_2'^j x_j' + \alpha_2',\ \lambda_3'^j x_j' + \alpha_3') = 0$$

cu

$$\begin{aligned} \lambda_j'^i &= \lambda_k^i \nu_j^k \\ \alpha_i' &= \beta_j \nu_i^j + \alpha_i, \qquad (i, j, k = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Funcţia invariantă integral a acestui grup este

$$\Psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta, \varphi, \psi) = \sin\theta$$

Măsura elementară cinematică din R_3 este

$$dK = |\sin\theta|\, d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge d\alpha_3 \wedge d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi \tag{2.9}$$

sau

$$dK = dP \wedge d\Omega \wedge d\psi \tag{2.10}$$

unde $dP = d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge d\alpha_3$ şi $d\Omega = |\sin\theta|\, d\varphi \wedge d\theta$, este elementul de arie pe sfera unitate şi ψ unghiul de rotaţie.

Pentru a da o altă expresie măsurii elementare cinematice din R_3, se consideră dreapta (G) care trece prin punctul P şi face cu axa Ox_3, unghiul θ, iar proiecţia ei pe planul x_1Ox_2 face cu Ox_1 unghiul φ. Notînd cu t distanţa de la proiecţia lui O pe (G) la P, scriind ecuaţiile dreptei (G) sub forma

$$x_1 = ax_3 + p, \qquad x_2 = bx_3 + q$$

Scanned with OKEN Scanner

avem [79]

$$\alpha_1 = p(1 - \cos^2\varphi \sin^2\theta) - q \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\theta - t \cos\varphi \sin\theta;$$
$$\alpha_2 = -p \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\theta + q(1 - \sin^2\varphi \sin^2\theta) - t \sin\varphi \sin\theta,$$
$$\alpha_3 = -\cos\theta(t + p \cos\varphi \sin\theta + q \sin\varphi \sin\theta)$$

şi

$$\frac{D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{D(p, q, t)} = \cos\theta$$

deci

$$dK = |\sin\theta \cos\theta|\, dp \wedge dq \wedge d\varphi \wedge d\theta \wedge d\psi \wedge dt \tag{2.11}$$

Ţinînd seama de expresia măsurii elementare a mulţimii dreptelor din R_3 (2.11) devine

$$dK = d\vec{G} \wedge dt \wedge d\psi \tag{2.12}$$

Dacă $(\vec{E})$ este un plan orientat iar dK_e este măsura cinematică din acest plan, avem

$$dK = d\vec{E} \wedge dK_e. \tag{2.13}$$

Fie R_n spaţiul euclidian cu n dimensiuni. S. S. Chern şi Ch. T. Yien [11] au dat expresia măsurii elementare cinematice din acest spaţiu:

$$dK^{(n)} = dP \wedge dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_1 \tag{2.14}$$

unde $dP = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ şi dO_h este elementul de arie pe sfera unitate h-dimensională din R_n.

În [79] se dă o altă formă măsurii elementare cinematice: se consideră dreapta (G) de ecuaţie

$$\frac{x^1 - p_1}{\rho_1} = \ldots = \frac{x^{n-1} p_{n-1}}{\rho_{n-1}} = \frac{x^n}{\rho_n}$$

unde

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-1} \\
\rho_2 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \cos\varphi_{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\rho_{n-1} &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\
\rho_n &= \cos\varphi_1
\end{aligned} \tag{2.15}$$

sînt coordonatele unui punct pe sfera unitate n — 1-dimensională S_{n-1}.

Presupunînd că dreapta (G) trece prin punctul $P(x^1, \ldots, x^n)$ şi notînd cu t distanţa între proiecţia ortogonală a originii O pe (G) la P se obţine

$$dP \wedge dO_{n-1} = |\cos\varphi_1|\, dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_{n-1} \wedge dt \wedge dO_{n-1}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau ţinînd seama de măsura elementară a mulţimii dreptelor din R_n:

$$dG = |\cos \varphi_1| dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_{n-1} \wedge dO_{n-1}$$

rezultă

$$dP \wedge dO_{n-1} = dG \wedge dt$$

deci

$$dK^{(n)} = dG \wedge dt \wedge dO_1 \wedge \ldots \wedge dO_{n-2} \tag{2.16}$$

Dacă figura $(K^{(n)})$ este orientată, avem

$$dK^{(n)} = \frac{1}{2} d\vec{G} \wedge dt \wedge dO_1 \wedge \ldots \wedge dO_{n-2} \tag{2.17}$$

unde $d\vec{G} = 2dG$.

Dacă $n = 2$ şi $n = 3$ se regăsesc formulele date de L. A. Santaló pentru măsura elementară cinematică din R_2 şi R_3.

In [77] se dă o altă formă măsurii elementare cinematice şi anume

$$dK^{(n)} = dH \wedge dK_H^{(n-1)} \tag{2.18}$$

unde (H) este hiperplanul de ecuaţie

$$\rho_1 X^1 + \ldots + \rho_n X^n - p = 0$$

ce trece prin punctul $P(x^1, \ldots, x^n)$ cu ρ_i daţi de (2.15) şi $p = \rho_1 x^1 + \ldots + \rho_n x^n$ iar $dK_H^{(n-1)}$ este măsura elementară cinematică în hiperplanul (H):

$$\overline{dK}_H^{(n-1)} = dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1} \wedge dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_1 \tag{2.19}$$

Dacă figura $K^{(n)}$ este orientată

$$dK^{(n)} = d\vec{H} \wedge dK_H^{(n-1)}. \tag{2.20}$$

§2.3. CURBE ŞI SUPRAFEŢE DE INTERSECŢIE.

Fie în planul euclidian R_2 o curbă închisă convexă (Γ) de lungime L şi care mărgineşte aria S. L.A. Santaló [60] determină măsura mulţimii segmentelor de lungime l care intersectează (Γ). Măsura elementară a acestei mulţimi este măsura elementară cinematică (2.10). Fixăm dreapta suport pe care se găseşte segmentul şi notînd cu λ lungimea coardei interceptate de curba (Γ) pe dreaptă, măsura căutată va fi

$$\mu = \int_D dG \int_{-(l+a)}^{\lambda - a} dt = \int_D (\lambda + l) dG$$

unde D este domeniul din planul parametrilor (p, θ) care corespunde poziţiilor dreptei care intersectează curba (Γ).

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\int_D \lambda dG = \pi S, \qquad \int_D dG = L.$$

deci

$$\mu = \pi S + lL. \tag{3.1}$$

Rezultă de aici că măsura mulţimii curbelor congruente cu o curbă închisă convexă (Γ) de lungime L şi care mărgineşte aria S, care intersectează un segment fix de lungime l este $2(\pi S + lL)$.

Avem :

Teorema 3.1. Probabilitatea ca un segment de lungime l care intersectează o curbă închisă convexă (Γ) de lungime L şi care mărgineşte aria S să intersecteze o curbă închisă convexă (Γ_1) de lungime L_1 şi care mărgineşte aria S_1 interioară curbei (Γ) este

$$P = \frac{\pi S_1 + lL_1}{\pi S + lL}. \tag{3.2}$$

În [66] se determină măsura mulţimii $\mathfrak{M}$ a segmentelor de lungime l care intersectează laturile unui unghi de mărime α. Fie (G) dreapta suport pe care se găseşte segmentul, de ecuaţie

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

Avem

$$\mu(\mathfrak{M}) = \int_D dG \wedge dt = \int_\Delta dG \int_{-a}^{l-a-\lambda} dt = \int_\Delta (l - \lambda) dp \wedge d\varphi$$

unde D este domeniul din spaţiul parametrilor (p, φ ,t) corespunzători mulţimii $\mathfrak{M}$, iar Δ este domeniul din spaţiul parametrilor (p, φ) corespunzători mulţimii de drepte ce intersectează laturile unghiului

$$\int_\Delta l\, dp \wedge d\varphi = \int_0^{\pi-\alpha} d\varphi \int_0^{\overline{OE}} l dp = \int_0^{\pi-\alpha} l\overline{OE} d\varphi = 2 \int_0^{\pi-\alpha} S d\varphi$$

şi

$$\int_\Delta \lambda dp \wedge d\varphi = \int_0^{\pi-\alpha} S\, d\varphi$$

unde $S = \frac{l^2 \sin \varphi \sin(\alpha + \varphi)}{2 \sin \alpha}$ este aria triunghiului OAB fig. 2.3.1.

Rezultă

$$\mu(\mathfrak{M}) = \frac{l^2}{4} [1 + (\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \alpha]. \tag{3.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

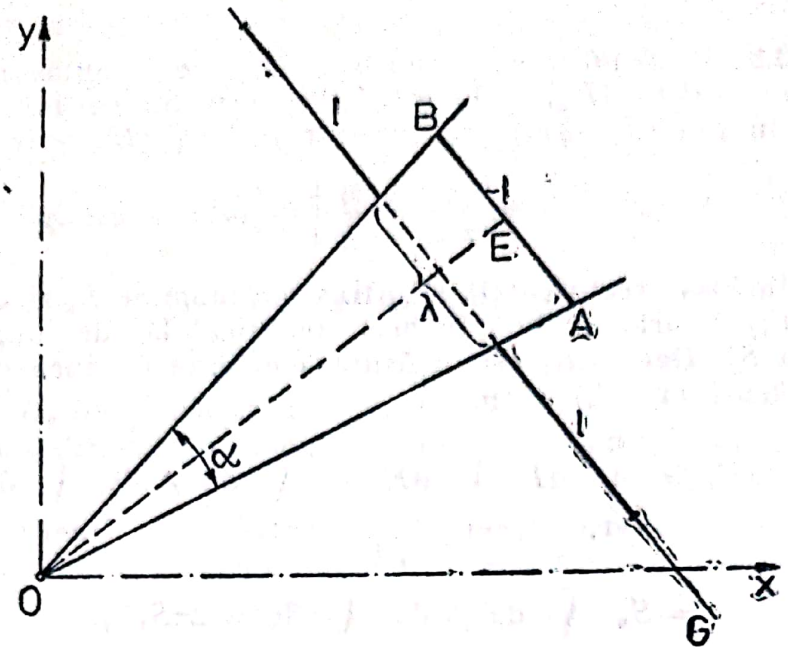

Fig. 2.3.1.

Avem :

Teorema 3.2. Probabilitatea ca un segment de lungime l care intersectează laturile unui unghi de mărime α să intersecteze şi laturile unui unghi de mărime β cu acelaşi vîrf şi cu laturile situate în exteriorul primului unghi ($\beta > \alpha$), este

$$P = \frac{1 + (\pi - \beta)\operatorname{ctg}\beta}{1 + (\pi - \alpha)\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{3.4}$$

Fie un oval fix (K_0) de lungime L_0 şi care mărgineşte domeniul D_0 de arie S_0, şi un oval mobil (K) de lungime L care mărgineşte domeniul D de arie S.

Să determinăm măsura mulţimii ovalelor congruente cu (K) care intersectează (K_0), şi anume

$$\mu = \int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK \tag{3.5}$$

unde $\mu = \mu_1 + \mu_2$, μ_1 — fiind măsura mulţimii ovalelor congruente cu (K) care conţin în interior punctul O luat ca origine a axelor de coordonate şi care este interior ovalului (K_0), iar μ_2 — măsura mulţimii ovalelor congruente cu (K) care intersectează (K_0) şi nu conţin în interior pe O. În [60] L. A. Santaló arată că

$$\mu_1 = 2\pi S, \qquad \mu_2 = 2\pi S_0 + L_0 L \tag{3.6}$$

deci

$$\mu = 2\pi(S_0 + S) + L_0 L. \tag{3.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem de aici

Teorema 3.3. Probabilitatea ca un oval (K), de lungime L și arie S care intersectează un oval fix (K_0) de lungime L_0 și arie S_0, să intersecteze și ovalul fix (K_1) de lungime L_1 și arie S_1, interior ovalului (K_0) este

$$P = \frac{2\pi(S_1 + S) + L_1 L}{2\pi(S_0 + S) + L_0 L}. \tag{3.8}$$

Fie curba închisă rectificabilă (Γ_0) fixă, de lungime L_0 și care mărginește aria S_0 și fie (Γ_1) o curbă mobilă închisă, rectificabilă, de lungime L_1 și care mărginește aria S_1. Dacă dK_1 este măsura elementară cinematică a mulțimii curbelor congruente cu (Γ_1) avem

$$I = \int_{\{P\in\Gamma_0\cap\Gamma_1\}} dP \wedge dK_1 = \int_{\{P\in\Gamma_0\}} dP \int_{\{P\in\Gamma_1\}} dK_1 = \int_{\{P\in\Gamma_0\}} dx \wedge dy \int_{\{P\in\Gamma_1\}} dx \wedge dy \wedge d\varphi =$$

$$= S_0 \int_{\{P\in\Gamma_1\}} dx \wedge dy \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi S_0 S_1.$$

Schimbînd ordinea de integrare, obținem:

$$I = \int_{\{\Gamma_0\cap\Gamma_1\neq\emptyset\}} dK_1 \int_{\{P\in\Gamma_0\cap\Gamma_1\}} dP = \int_{\{\Gamma_0\cap\Gamma_1\neq\emptyset\}} S_{01}\, dK_1$$

unde am notat cu S_{01} aria intersecției $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$.

Rezultă de aici următoarea relație dată de L. A. Santaló [66]

$$\int_{\{\Gamma_0\cap\Gamma_1\neq\emptyset\}} S_{01}\, dK_1 = 2\pi S_0 S_1. \tag{3.9}$$

Valoarea medie a ariei intersecției $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$ este, ținînd seama de (3.7),

$$E[S_{01}] = \frac{\int_{\{\Gamma_0\cap\Gamma_1\neq\emptyset\}} S_{01} dK_1}{\int_{\{\Gamma_0\cap\Gamma_1\neq\emptyset\}} dK_1} = \frac{2\pi S_0 S_1}{2\pi(S_0 + S_1) + L_0 L_1}. \tag{3.10}$$

Să considerăm integrala

$$I_1 = \int_{\{P\in\Gamma_1\}} ds \wedge dK_1$$

unde s este arcul pe curba (Γ_0) și $P(s)$ un punct pe această curbă.

Avem

$$I_1 = \int_{L_0} ds \int_{\{P\in\Gamma_1\}} dK_1 = 2\pi S_1 L_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Schimbînd ordinea de integrare:

$$I_1 = \int\limits_{\{\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset\}} \mathrm{d}K_1 \int\limits_{l_{01}} \mathrm{d}s = \int\limits_{\{\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset\}} l_{01}\mathrm{d}K_1$$

unde l_{01} este lungimea arcului curbei (Γ_0) interior curbei (Γ_1). Rezultă

$$\int\limits_{\{\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset\}} l_{01}\mathrm{d}K_1 = 2\pi S_1 L_0. \tag{3.11}$$

Notînd cu l_{10} lungimea arcului curbei (Γ_1) interior curbei (Γ_0) și ținînd seama că măsura elementară cinematică este invariantă la o mișcare euclidiană avem

$$\int\limits_{\{\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset\}} l_{10}\mathrm{d}K_1 = 2\pi S_0 L_1. \tag{3.12}$$

Cu notația $L_{01} = l_{01} + l_{10}$ (lungimea arcului curbei care mărginește intersecția $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$) se obține

$$\int\limits_{\{\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset\}} L_{01}\mathrm{d}K_1 = 2\pi(S_1 L_0 + S_0 L_1) \tag{3.13}$$

și

$$E[L_{01}] = \frac{\int\limits_{\{\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset\}} L_{10}\mathrm{d}K_1}{\int\limits_{\{\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset\}} \mathrm{d}K_1} = \frac{2\pi(S_1 L_0 + L_1 S_0)}{2\pi(S_0 + S_1) + L_0 L_1} \tag{3.14}$$

Fie în R_2 un domeniu fix D_0 de arie S_0, a cărui frontieră este o curbă netedă ∂D_0 de lungime L_0 și un domeniu mobil D de arie S, a cărui frontieră ∂D are lungimea L. Frontiera domeniului $D_0 \cap D$, $\partial(D_0 \cap D)$ nu este o curbă netedă. Notînd cu $K = D \cup \partial D$ și $\chi(D_0 \cap D)$ caracteristica Euler-Poincaré a domeniului $D_0 \cap D$ formula cinematică principală a lui Blaschke [5] este

$$\int\limits_{\{D \cap D_0 \neq \emptyset\}} \chi(D_0 \cap D)\mathrm{d}K = 2\pi[S_0\chi(D) + S\chi(D_0)] + L_0 L \tag{3.15}$$

Dacă domeniile D_0 și D sînt convexe, atunci $D_0 \cap D$ este convex și $\chi(D_0 \cap D) = \chi(D) = \chi(D_0) = 1$, formula (3.15) este identică cu formula lui Santaló (3.7).

Dacă D_0 și D sînt simplu conexe, $\chi(D) = \chi(D_0) = 1$.

Presupunînd că $D_0 \cap D$ este format din ν domenii simplu conexe, $\chi(D_0 \cap D) = \nu$ și formula (3.15) se scrie:

$$\int\limits_{\{D \cap D_0 \neq \emptyset\}} \nu\mathrm{d}K = 2\pi(S_0 + S) + L_0 L \tag{3.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă D_0 se reduce la un număr de m puncte, $S_0 = L_0 = 0$, $\chi(D_0) = m$ (considerînd punctele cercuri de rază nulă), formula (3.16) ne dă

$$\int_{\{D \cap D_0 \neq \emptyset\}} n\,dK = 2\pi m\, S, \tag{3.17}$$

n fiind numărul de puncte conținute în interior de o poziție a domeniului mobil D.

În cazul în care D este un cerc de rază R avem:

$$\int_{\{D \cap D_0 \neq \emptyset\}} dK = 2\pi(S_0 + \pi R^2 + RL_0) \tag{3.18}$$

Notînd cu P centrul cercului cu $\partial D_0(r)$ curba paralelă cu ∂D_0 la distanța r și $S_0(r)$ aria mărginită de această curbă, avem:

$$\int_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} dK = \int_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} dP \wedge d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\{P \in D_0(r)\}} dP = 2\pi S_0(r). \tag{3.19}$$

De aici și din (4.36) se obține formula lui Steiner [71]

$$S_0(r) = S_0 + RL_0 + \pi R^2 \tag{3.20}$$

Fie în spațiul euclidian R_3 un corp convex fix (K) de volum V și arie S. L. A. Santaló [61] determină măsura mulțimii segmentelor orientate de lungime l care intersectează (K). Dacă λ este lungimea coardei determinate de (K) pe dreapta suport a segmentului (G) avem:

$$\mu_{\vec{s}} = \int d\vec{G} \wedge dt \wedge d\varphi = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\{G \cap K \neq \emptyset\}} d\vec{G} \int_0^{\lambda + l} dt = 2\pi \int_{\{G \cap K \neq \emptyset\}} (\lambda + l)\, d\vec{G}$$

dar

$$\int_{\{G \cap K \neq \emptyset\}} d\vec{G} = 2 \int_{\{G \cap K \neq \emptyset\}} dG = \pi S$$

și

$$\int_{\{G \cap K \neq \emptyset\}} \lambda\, d\vec{G} = 2 \int_{\{G \cap K \neq \emptyset\}} \lambda\, dG$$

Pentru calculul acestei integrale vom proceda în modul următor: fie P punctul în care (G) intersectează un plan (E) și să considerăm integrala

$$I = \int_{\{P \in E\}} dG \wedge dE$$

Fixînd planul (E) și ținînd seama de formula (8.33) avem

$$I = \int_{\{E \cap \Sigma \neq \emptyset\}} dE \int_{\{G \cap \Sigma \neq \emptyset\}} dG = \pi \int_{\{E \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \sigma\, dE = 2\pi^2 V$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă fixăm dreapta (G) şi ţinem seama de (8.28) avem

$$I = \int_{\{G \cap \Sigma \neq \emptyset\}} dG \int_{\{E \cap \dot{\Sigma} \neq \emptyset\}} dE = \pi \int_{\{G \cap \dot{\Sigma} \neq \emptyset\}} \lambda dG$$

Egalînd cele două valori obţinem

$$\int_{\{G \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \lambda dG = 2\pi V$$

deci

$$\int_{\{G \cap K \neq \emptyset\}} \lambda d\vec{G} = 4\pi V \tag{3.21}$$

Rezultă

$$\mu_{\vec{s}} = 2\pi^2 [4V + lS] \tag{3.22}$$

Dacă segmentul se reduce la un punct, $l = 0$ şi

$$\int_{\{P \in K\}} dK = 8\pi^2 V \tag{3.23}$$

Teorema 3.4. Măsura mulţimii corpurilor convexe congruente cu (K) de arie S şi volum V care intersectează un segment fix de lungime l este

$$\mu_k = 2\pi^2(4V + lS)$$

iar măsura corpurilor convexe congruente cu (K), care conţin în interior un punct fix este $8\pi^2 V$.

Teorema 3.5. Probabilitatea ca un segment de lungime l care intersectează un corp convex (K) de arie S şi volum V să intersecteze şi corpul convex (K_1) de arie S_1 şi volum V_1 interior lui (K) este

$$P = \frac{4V_1 + lS_1}{4V + lS}. \tag{3.24}$$

Fie un corp convex fix (K_0) de arie S_0 şi volum V_0 şi un corp mobil (K_1) de arie S_1 şi volum V_1. Măsura mulţimii corpurilor congruente cu (K_1) care intersectează (K_0) este

$$\mu_{K_1} = \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK_1.$$

L. A. Santaló arată în [61] că

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK_1 = 8\pi^2(V_0 + V_1) + 2\pi(S_0\bar{H}_1 + S_1\bar{H}_0) \tag{3.25}$$

unde $\bar{H}_0$ şi $\bar{H}_1$ sînt integralele curburilor medii ale lui K_0, respectiv K_1.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

Teorema 3.6. Probabilitatea ca un corp convex (K_1) care intersectează un corp convex (K_0) să intersecteze și corpul convex (K_2) interior lui (K_0) este

$$P = \frac{4\pi(V_2 + V_1) + S_2\overline{H}_1 + S_1\overline{H}_2}{4\pi(V_0 + V_1) + S_0\overline{H}_1 + S_1\overline{H}_0}$$

Dacă vom considera integrala

$$I = \int_{\{P \in K_1 \cap K_0\}} dP \wedge dK_1$$

avem

$$I = \int_{\{P \in K_1 \cap K_0\}} dP \wedge dK_1 = \int_{\{P \in K_0\}} dP \int_{\{P \in K_1\}} dK_1 = 8\pi^2 V_0 V_1,$$

și

$$I = \int_{\{P \in K_1 \cap K_0\}} dP \wedge dK_1 = \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK_1 \int_{\{P \in K_0 \cap K_1\}} dP = \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset\}} V_{01} dK_1$$

unde V_{01} este volumul intersecției $K_1 \cap K_0$. Ținînd seama de (3.25) rezultă

$$E[V_{01}] = \frac{4\pi V_0 V_1}{4\pi(V_0 + V_1) + S_0\overline{H}_1 + S_1\overline{H}_0} \tag{3.26}$$

Să considerăm integrala

$$I_1 = \int_{\{G \cap (K_1 \cap K_0) \neq \emptyset\}} dG \wedge dK_1$$

avem

$$\int_{\{G \cap (K_1 \cap K_0) \neq \emptyset\}} dG \wedge dK_1 = \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK_1 \int_{\{G \cap (K_1 \cap K_0) \neq \emptyset\}} dG = \frac{\pi}{2} \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset\}} S_{01} dK_1$$

unde S_{01} este aria intersecției $K_1 \cap K_0$.

Dar

$$\int_{\{G \cap (K_1 \cap K_0) \neq \emptyset\}} dG \wedge dK_1 = \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} dG \int_{\{G \cap K_1 \neq \emptyset\}} dK_1 = 2\pi^2 \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} (4V_1 + \lambda S_1) dG =$$

$$= 4\pi^3(V_0 S_1 + V_1 S_0)$$

Egalînd cele două valori obținem:

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset\}} S_{01} dK_1 = 8\pi^2(V_0 S_1 + V_1 S_0)$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$E[S_{01}] = \frac{4\pi(V_0 S_1 + V_1 S_0)}{4\pi(V_0 + V_1) + S_2\bar{H}_1 + S_1\bar{H}_0}. \tag{3.27}$$

Fie un domeniu fix D_0 a cărui frontieră ∂D_0 este o suprafaţă de două ori diferenţiabilă şi un domeniu mobil D a cărui frontieră ∂D este o suprafaţă de două ori diferenţiabilă. Dacă notăm $K_0 = D_0 \cup \partial D_0$, $K = D \cup \partial D$, presupunînd că intersecţia $D_0 \cap D$ este formată dintr-un număr finit de componente, avem

$$\chi(D_0 \cap D) = \chi(D \cap \partial D_0) + \chi(D_0 \cap \partial D) + \chi(\partial D_0 \cap \partial D)$$

şi

$$\int_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} \chi(D_0 \cap D)\mathrm{d}K = \int_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} \chi(D \cap \partial D_0)\mathrm{d}K + \int_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} \chi(D_0 \cap \partial D)\mathrm{d}K + \tag{3.28}$$

$$+ \int_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} \chi(\partial D_0 \cap \partial D)\mathrm{d}K$$

Notînd prin k curbura lui Gauss a suprafeţei avem formula lui Gauss-Bonnet

$$\chi(D) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} k\mathrm{d}\sigma,$$

cu $\mathrm{d}\sigma$ elementul de arie pe suprafaţa ∂D.

Avem, ţinînd seama de (3.23)

$$\int_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} \chi(D \cap \partial D_0)\mathrm{d}K = 8\pi^2 V \chi(D_0) \tag{3.29}$$

unde V este volumul corpului K şi

$$\int_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} \chi(D_0 \cap \partial D)\mathrm{d}K = 8\pi^2 V_0 \chi(D) \tag{3.30}$$

De asemenea [12]

$$\int_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} \chi(\partial D_0 \cap \partial D)\mathrm{d}K = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{\{\partial D \cap \partial D_0\}} \frac{H_0 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right) + H \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right)}{\sin \alpha} \mathrm{d}s$$

unde $\mathrm{d}s$ este elementul de arc pe curba $\partial D \cap \partial D_0$, H_0 şi H curburile medii ale suprafeţelor ∂D_0 respectiv ∂D iar α unghiul dintre normalele exterioare la suprafeţele ∂D_0 şi ∂D într-un punct al curbei $\partial D_0 \cap \partial D$, sau

$$\int_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} \chi(\partial D_0 \cap \partial D)\mathrm{d}K = 2\pi(S_0\bar{H} + S\bar{H}_0). \tag{3.31}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind aceste relaţii în (3.28) avem formula cinematică principală a lui Blaschke [6]

$$(3.32)\qquad \int\limits_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} \chi(D_0 \cap D)\mathrm{d}K = 8\pi^2[V_0\chi(D) + V\chi(D_0)] + 2\pi(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0)$$

Dacă D_0 şi D sînt simplu conexe $\chi(D_0) = \chi(D) = 1$. Dacă ν este numărul de domenii simplu conexe din care este format $D_0 \cap D$ atunci $\chi(D_0 \cap D) = \nu$ şi formula (3.32) se scrie

$$(3.33)\qquad \int\limits_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} \nu \mathrm{d}K = 8\pi^2(V_0 + V) + 2\pi(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0)$$

Dacă D_0 este format din m puncte atunci $S_0 = V_0 = 0$, $\chi(D_0) = m$ (considerăm punctele ca sfere de rază nulă), $\overline{H}_0 = 0$ şi (3.32) ne dă

$$(3.34)\qquad \int\limits_{\{D_0 \cap D \neq \emptyset\}} n\mathrm{d}K = 8\pi^2 mV$$

n reprezentînd numărul de puncte conţinute în interior de o poziţie a domeniului D.

Fie în spaţiul euclidian cu n dimensiuni, R_n, un corp convex fix de volum $V_n(K_0)$. Să determinăm măsura mulţimii segmentelor orientate de lungime l care intersectează K_0. Ţinînd seama de (4.20') avem

$$\mu_s^{\rightarrow} = 2\int\limits_{S_1} \mathrm{d}O_1 \int\limits_{S_2} \mathrm{d}O_2 \ldots \int\limits_{S_{n-1}} \mathrm{d}O_{n-2} \int\limits_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} \mathrm{d}G \int\limits_0^{\lambda+l} \mathrm{d}t$$

unde λ este lungimea coardei determinată de K_0 pe dreapta G.

Deci

$$\mu_s^{\rightarrow} = 2O_1O_2 \ldots O_{n-2} \int\limits_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} (l + \lambda)\mathrm{d}G$$

Ţinînd seama de (7.23') şi (7.29) avem

$$(3.35)\qquad \mu_s^{\rightarrow} = O_1O_2 \ldots O_{n-2}\left[O_{n-1}V_n(K_0) + \frac{O_{n-2}}{O_{n-1}} V_{n-1}(\partial K_0) \cdot l\right].$$

Rezultă de aici

Teorema 3.7. [80] Probabilitatea ca un segment de lungime l care intersectează un corp convex fix K_0, să intersecteze şi un corp convex K interior lui K_0, este

$$P = \frac{(n-1)O_{n-1}V_n(K) + O_{n-2}V_{n-1}(\partial K) \cdot l}{(n-1)O_{n-1}V_n(K_0) + O_{n-2}V_{n-1}(\partial K_0)l}.$$

Ţinînd seama de invarianţa măsurii cinematice avem

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.8. [80] Măsura mulțimii corpurilor convexe, congruente cu un corp convex K de volum $V_n(K)$ și a cărui frontieră are volumul $V_{n-1}(\partial K)$, care intersectează un segment fix de lungime l este

$$\mu = O_1 O_2 \dots O_{n-2}\left[O_{n-1}V_n(K) + \frac{O_{n-2}}{O_{n-1}} V_{n-1}(\partial K) l\right].$$

Fie K_0 un corp convex n-dimensional fix și K un corp convex n-dimensional mobil. Să determinăm valoarea medie a variabilei aleatoare $V_{n-1}(\partial K)$ unde ∂K este frontiera corpului convex $\mathfrak{K}^{(n)} = K_0 \cap K$.

Să considerăm integrala

$$I = \int_{\{K_0 \cap K \neq \emptyset,\, G \cap \mathfrak{K}^{(n)} \neq \emptyset\}} dG \wedge dK = \int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK \int_{\{G \cap \mathfrak{K}^{(n)} \neq \emptyset\}} dG =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} V_{n-1}(\partial \mathfrak{K}^{(n)})\, dK$$

sau

$$I = \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} dG \int_{\{K \cap \lambda \neq \emptyset\}} dK$$

unde λ este lungimea coardei interceptate de K_0 pe dreapta G. Ținînd seama de formulele (7.23′) și (7.29)

$$I = O_1 O_2 \dots O_{n-1} \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} [V_n(K) V_{n-1}(\partial K_0) + V_n(K_0) V_{n-1}(\partial K)]$$

Dacă ținem seama de (2.3 cap. 3) și de egalitatea celor două expresii a lui I avem

$$(3.36)\quad E[V_{n-1}(\partial \mathfrak{K}^{(n)})] = \frac{V_n(K_0) V_{n-1}(\partial K) + V_n(K) V_{n-1}(\partial K_0)}{V_n(K_0) + V_n(K) + \frac{1}{nO_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+1} M_k(K_0) M_{n-k-2}(K)}.$$

Să determinăm măsura mulțimii corpurilor convexe congruente cu un corp convex $(n-1)$-dimensional $K^{(n-1)}$ care intersectează un corp convex fix, n-dimensional $K_0^{(n)}$. Vom considera măsura cinematică dată de (4.21′). Notînd prin $\mathfrak{K}_0^H = K_0^{(n)} \cap H$ corpul convex $(n-1)$-dimensional și prin $K_H^{(n-1)}$ un corp congruent cu $K^{(n-1)}$ situat în hiperplanul H avem [80]

$$\mu = 2 \int_{\{H \cap K_0^{(n)} \neq \emptyset\}} dH \int_{\{K_H^{n-1} \cap \mathfrak{K}_0^H \neq \emptyset\}} dK_H^{(n-1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

și ținînd seama de (4.14) avem

$$\mu = 2O_1O_2 \dots O_{n-2}[V_{n-1}(K^{(n-1)}) \int\limits_{\{H \cap K_0^{(n)} \neq \emptyset\}} dH + \int\limits_{\{H \cap K_0^{(n)} \neq \emptyset\}} V_{n-1}(\mathfrak{K}_0^H)dH +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)O_{n-2}} \sum_{h=0}^{n-3} \binom{n-1}{h+1} M_{n-h-3}(K^{(n-1)}) \int\limits_{\{H \cap K_0^{(n)} \neq \emptyset\}} M_h(\mathfrak{K}_0^H)dH$$

Ținînd seama de (7.4) cap. I și de formula lui Santaló [67]

$$\int\limits_{\{H \cap K_0^{(n)} \neq \emptyset\}} M_h(\mathfrak{K}_0^H)\,dH = \frac{O_{n-2}}{2} \cdot \frac{O_{n-h}}{O_{n-h-1}} M_h(K_0^{(n)}) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} O_{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-h}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-h+1}{2}\right)} M_h(K_0^{(n)}),$$

avem

$$\mu = 2O_1O_2 \dots O_{n-2}\left[\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} V_n(K_0^{(n)}) + V_{n-1}(K^{(n-1)})M_{n-2}(K_0^{(n)}) +\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi}}{2(n-1)} \sum_{h=0}^{n-3} \binom{n-1}{h+1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-h}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-h+1}{2}\right)} M_h(K_0^{(n)})M_{n-h-2}(K^{(n-1)})\right].$$

Avem, ținînd seama de invarianța măsurii cinematice

Teorema 3.9. [80] Măsura mulțimii corpurilor convexe, congruente cu un corp convex n-dimensional $K^{(n)}$, care intersectează un corp convex $(n-1)$ dimensional fix $K_0^{(n-1)}$ este

$$\mu = 2O_1O_2 \dots O_{n-2}\left[\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} V_n(K^{(n)}) + V_{n-1}(K_0^{(n-1)})M_{n-2}(K^{(n)}) +\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi}}{2(n-1)} \sum_{h=0}^{n-3} \binom{n-1}{h+1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-h}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-h+1}{2}\right)} M_h(K^{(n)})M_{n-h-2}(K_0^{(n-1)})\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

§2.4. VARIABILE ALEATOARE ASOCIATE SISTEMELOR DE FIGURI CONVEXE DINTR-UN SPAȚIU EUCLIDIAN.

Fie în spațiul euclidian R_n o figură convexă fixă K_0 și un sistem de m figuri convexe $\{K_1, \ldots, K_m\}$, aleatoare ca poziție, independente, uniform repartizate în R_n și congruente cu o figură convexă K. Vom nota prin $\mathcal{K}_m = K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)$. Acestei figuri îi putem asocia diverse variabile aleatoare, a căror valoare medie ne propunem să o determinăm.

În planul euclidian R_2, figurii $\mathcal{K}_m$ îi asociem variabila aleatoare, lungimea l_m. În [74] se calculează $E[l_m]$ și anume:

Măsura elementară cinematică din R_2 este

$$dK = dx \wedge dy \wedge d\varphi.$$

Fie K_0 un oval fix de arie S_0 și de lungime L_0 și sistemul $\{K_1, \ldots, K_m\}$ de ovale de arii S și lungimi L. Considerăm integrala

$$I = \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset,\, G \cap \mathcal{K}_m \neq \emptyset\}} dG \wedge dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m, \tag{4.1}$$

dG fiind măsura elementară a mulțimii dreptelor de ecuație $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$.

Avem

$$I = \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m \int_{\{G \cap \mathcal{K}_m \neq \emptyset\}} dG = \tag{4.2}$$

$$= \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} l_m dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m$$

Pe de altă parte

$$I = \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} dG \int_{\{K_i \cap \lambda \neq \emptyset\}} dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m$$

unde λ este lungimea segmentului interceptat de G pe K_0.

Dar [4.2]

$$\int_{\{K \cap \lambda \neq \emptyset\}} dK = 2(\pi S + L\lambda) \tag{4.3}$$

deci, ținînd seama că ovalele $K_1, \ldots, K_m$ sînt independente, avem

$$\int_{\{K_i \cap \lambda \neq \emptyset\}} dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = \int_{\{K_1 \cap \lambda \neq \emptyset\}} dK_1 \ldots \int_{\{K_m \cap \lambda \neq \emptyset\}} dK_m = 2^m (\pi S + L\lambda)^m$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$I = 2^m \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} (\pi S + L\lambda)^m dG \tag{4.4}$$

Egalînd (4.2) cu (4.4) rezultă

$$\int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} l_m dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = 2^m \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} (\pi S + L\lambda)^m dG$$

Dar (3.7)

$$\int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = \left(\int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK \right)^m = [2\pi(S_0 + S) + L_0 L]^m$$

Rezultă

$$E[l_m] = \frac{2^m}{[2\pi(S_0 + S) + L_0 L]^m} \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} (\pi S + L\lambda)^m dG. \tag{4.5}$$

În cazul particular în care K_0 este un cerc de rază R_0 iar K_i cercuri de rază R, $(i = 1, \ldots, m)$ avem [74]

$$E[l_m] = \frac{\pi R_0}{\left(1 + \frac{R_0}{R}\right)^{2m}} \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \left(\frac{4R_0}{\pi R}\right)^h B\left(\frac{1}{2}, \frac{h}{2} + 1\right) \tag{4.6}$$

Vom determina $E[l_m]$ în cazul în care K_0 este un pătrat, caz, care intervine în multe aplicații statistice [92]. Vom considera pătratul cu centrul și originea O și laturile paralele cu axele de coordonate (fig. 2.4.1). Pentru calculul lui $E[l_m]$ va trebui să calculăm

$$I_n = \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} \lambda^n dG$$

unde $dG = dp \wedge d\varphi$.

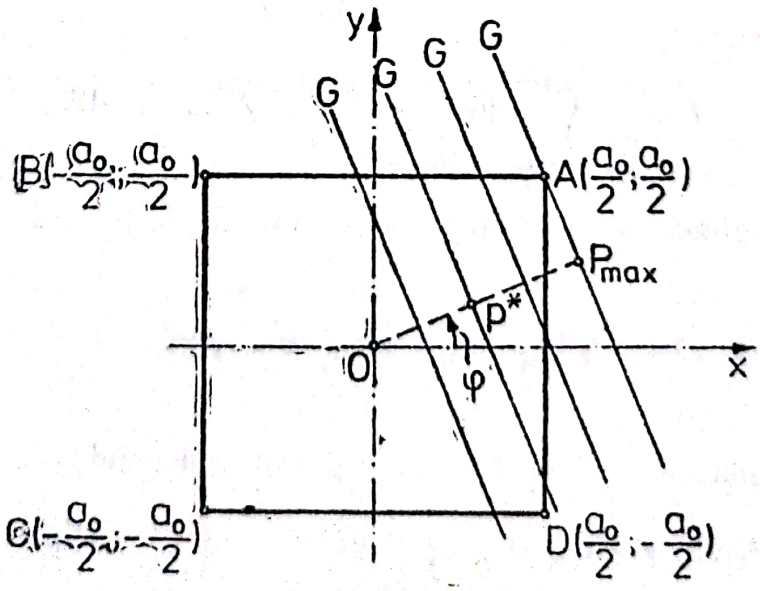

Fig. 2.4.1

Vom diviza intervalul $[0,2\pi]$ în opt subintervale

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \ldots, \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$

Notînd prin p_{max} distanţa de la O la dreapta (G) care trece prin A şi este perpendiculară pe direcţia φ şi prin p^* distanţa de la O la dreapta ce trece prin vîrful D avînd aceeaşi direcţie, dacă

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$$

avem

$$p_{max} = \frac{a_0}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$p^* = \frac{a_0}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

deci

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{a_0}{\cos\varphi}, & \text{dacă } 0 \leqslant p \leqslant \dfrac{a_0}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi) \\ \dfrac{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) - p}{\sin\varphi\cos\varphi}, & \text{dacă } \dfrac{a_0}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi) \leqslant p \leqslant \dfrac{a_0}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) \end{cases}$$

şi

$$I_n^{\left[0,\frac{\pi}{4}\right]} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \left\{ \int_0^{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi-\sin\varphi)} \frac{a_0^n}{\cos^n\varphi}\, dp + \int_{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi-\sin\varphi)}^{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)} \left[\frac{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi) - p}{\sin\varphi\cos\varphi}\right]^n dp \right\} =$$

$$= \frac{a_0^{n+2}}{2(n+2)}\left[1 - 2^{\frac{n-1}{2}} + V(n)\right]$$

unde am notat

$$V(n) = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^{(n-1)}\varphi}. \tag{4.7}$$

Dacă

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

notînd prin p_1^* distanţa de la O la dreapta ce trece prin vîrful B şi este perpendiculară pe direcţia φ, avem

$$p_1^* = \frac{a_0}{4}(-\cos\varphi + \sin\varphi)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{a_0}{\sin\varphi}, & \text{dacă } 0 \leqslant p \leqslant \dfrac{a_0}{2}(-\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \dfrac{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) - p}{\sin\varphi\cos\varphi}, & \text{dacă } \dfrac{a_0}{2}(-\cos\varphi + \sin\varphi) \leqslant p \leqslant \dfrac{a_0}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) \end{cases}$$

Rezultă

$$I_n^{\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{ \int_0^{\frac{a_0}{2}(-\cos\varphi+\sin\varphi)} \frac{a_0^n}{\sin^n\varphi} dp + \int_{\frac{a_0}{2}(-\cos\varphi+\sin\varphi)}^{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)} \left(\frac{\frac{a_0}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) - p}{\sin\varphi\cos\varphi}\right)^n dp \right\} =$$

$$= I_n^{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]}.$$

În acelaşi mod se arată că

$$I_n^{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]} = I_n^{\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]} = \ldots = I_n^{\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]} = I_n^{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]}.$$

Deci

(4.8) $$I_n = \frac{4a_0^{n+1}}{n+1}\left[1 - 2^{\frac{n-2}{2}} + V(n)\right]$$

unde $V(n)$ este dat de (4.7).

Dacă considerăm figura K un cerc de rază R, avem

(4.9) $$E[l_m] = \frac{4\pi^m a_0}{\left[\pi + 4\frac{a_0}{R} + \left(\frac{a_0}{R}\right)^2\right]^m} \sum_{K=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{k - 2^{\frac{k-1}{2}} + V(k)}{K+2} \left(\frac{2a_0}{\pi R}\right)^k.$$

Pentru dispersia $\sigma^2(s_m)$ avem, notînd cu s_m aria figurii $\mathfrak{K}_m$ [74]

$$\sigma^2(s_m) = \frac{1}{[2\pi(S_0 + S) + L_0 L]^m}\left[2\int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} \Phi_m(K, \lambda) dG - \frac{(2\pi S)^{2m} S_0^2}{[2\pi(S_0 + S) + L_0 L]^m}\right]$$

unde

$$\Phi_m(K, \lambda) = \int_0^{\lambda}\int_0^{v} [\mu(K, u)]^m u\, du\, dv.$$

În cazul nostru avem

$$\mu(K, u) = \frac{\pi^2}{2}(2R - u)^2$$

şi

$$\Phi_m(K,\lambda)=\int_0^{\lambda}\int_0^{v}\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^m(2R-u)^{2m}u\,du\,dv=$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k\binom{2m}{k}(2k)^{2m-K}\cdot\frac{\lambda^{k+3}}{(k+2)(k+3)},$$

deci

$$\sigma^2(s_m)=\frac{\pi^m a_0^4}{\left[\pi+4\frac{a_0}{R}+\left(\frac{a_0}{R}\right)^2\right]^m}\left\{8\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k\binom{2m}{k}\frac{L-2^{\frac{k+2}{2}}+V(k+3)}{(k+2)(k+3)(k+4)}\times\right.$$

(4.10)

$$\left.\times\left(\frac{a_0}{2R}\right)^k-\frac{\pi^m}{\left[\pi+4\frac{a_0}{R}+\left(\frac{a_0}{R}\right)^2\right]^m}\right\}.$$

În cazul în care K este o bandă infinită de lăţime a obţinem

(4.11)
$$E[l_m]=\frac{4a_0}{\left[1+\frac{4a_0}{\pi a}\right]^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1-2^{\frac{k+2}{2}}+V(k)}{K+1}\cdot\left(\frac{4a_0}{\pi a}\right)^k$$

şi

$$\sigma^2(s_m)=\frac{a_0^4}{\left(1+\frac{4a_0}{\pi a}\right)^m}\left\{\frac{8}{4^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1-2^{\frac{k+1}{2}}+V(k+3)}{(k+2)(k+3)(k+4)}\times\right.$$

(4.12)

$$\left.\times\left(\frac{2a_0}{\pi a}\right)^k-\frac{1}{\left(1+\frac{4a_0}{\pi a}\right)^m}\right\}.$$

În spaţiul euclidian R_3, fie K_0 un corp convex de volum V_0 şi arie S_0 a cărei integrală a curburii medii a suprafeţei ∂K_0 este $\bar{H}_0$ şi $\{K_1,\ldots,K_m\}$ un sistem de m corpuri convexe, aleatoare ca poziţie, independente, uniform repartizate în R_3 şi congruente cu un corp convex K de volum V, arie S şi pentru care integrala curburii medii a suprafeţei ∂K este $\bar{H}$. Corpului $\mathfrak{K}_m=K_0\cap(K_1\cap\ldots\cap K_m)$ îi asociem variabila aleatoare, aria s_m a frontierei lui $\mathfrak{K}_m$ şi volumul v_m. În [74] se dă $E[s_m]$, şi anume:

Fie integrala

$$I=\int_{\{K_0\cap(K_1\cap\ldots\cap K_m)\neq\emptyset,\,G\cap\mathfrak{K}_m\neq\emptyset\}}dG\wedge dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $dG = |\cos\theta|dx \wedge dy \wedge d\Omega$. Avem

$$I = \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m \int_{\{G \cap \mathcal{K}_m \neq \emptyset\}} dG =$$

(4.13)

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} s_m dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m.$$

Schimbînd ordinea de integrare și ținînd seama de (3.22) avem

$$I = \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} dG \int_{\{K_i \cap \lambda \neq \emptyset\}} dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m =$$

(4.14)

$$= (2\pi^2)^m \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} (4V + S\lambda)^m dG$$

Rezultă egalînd (4.13) cu (4.14)

$$\int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} s_m dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = 2^{m+1}\pi^{2m-1} \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} (4V + S\lambda)^m dG$$

Dacă ținem seama de formula (3.25) avem

(4.15) $$E[s_m] = \frac{2\pi^{m-1}}{[4\pi(V_0 + V) + S_0\bar{H} + S\bar{H}_0]^m} \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} (4V + S\lambda)^m dG.$$

În particular, dacă K_0 este o sferă de rază R_0 și K o sferă de rază R avem [74]

(4.16) $$\int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} \lambda^h dG = \frac{\pi^2 (2R_0)^{h+2}}{h+2}$$

și

(4.17) $$E[s_m] = \frac{8\pi R_0^2}{\left(1 + \frac{R_0}{R}\right)^{3m}} \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \left(\frac{3R_0}{2R}\right)^h \cdot \frac{1}{h+2}.$$

Dacă K_0 este o sferă de rază R_0 și K un cilindru infinit de rază R să determinăm $E[s_m]$. Considerăm K, un cilindru de rază R și generatoare l, și vom trece la limită pentru $l \to \infty$. Avem $\bar{H} = \pi l + \pi^2 R$ și (4.15) devine

$$E[s_m] = 2\pi^{m-1} \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} \lim_{l \to \infty} \left[\frac{4\pi R^2 l + 2\pi R(R+l)\lambda}{\frac{16}{3}\pi^3 R_0^3 + 4\pi^3 R^2 l + 4\pi^2 R_0^2 (l + \pi R) + 8\pi^3 R_0 R(R+l)} \right]^m dG =$$

$$= \frac{R^m}{2^{m-1}\pi (R_0 + R)^{3m}} \int_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} (2R + \lambda)^m dG.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de (4.16) rezultă

$$E[s_m] = \frac{8\pi R_0^2}{\left(1 + \frac{R_0}{R}\right)^{2m}} \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \frac{1}{h+2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^h. \tag{4.18}$$

Avem [61]

$$\int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} v_m \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = (8\pi^2 V)^m V_0,$$

Relaţie care se obţine din calculul integralei

$$I = \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset,\ P \in \mathfrak{K}_m\}} \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m$$

în două moduri diferite.

Ţinînd seama de relaţia (3.25) avem

$$E[v_m] = \frac{(8\pi^2 V)^m V_0}{[8\pi^2(V_0 + V) + 2\pi(S_0 \overline{H} + S\overline{H_0})]^m}. \tag{4.19}$$

Fie în spaţiul euclidian cu n dimensiuni, R_n, un corp convex fix K_0 şi $\{K_1, \ldots, K_m\}$ un sistem de m corpuri convexe, aleatoare ca poziţie, independente, uniform repartizate în R_n, congruente cu un corp convex fix K. Notînd prin $s_m = V_{n-1}(\partial \mathfrak{K}_m)$, aria frontierei ∂K_m a corpului convex $\mathfrak{K}_m = K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)$, vom calcula $E[s_m]$.

Vom calcula în două moduri integrala [78]:

$$I = \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset \ \ G \cap \mathfrak{K}_m \neq \emptyset\}} \mathrm{d}G \wedge \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m.$$

Avem (7.23′)

$$\int_{\{G \cap \mathfrak{K}_m \neq \emptyset\}} \mathrm{d}G = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} V_{n-1}(\partial \mathfrak{K}_m) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} s_m$$

deci

$$I = \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m \int_{\{G \cap \mathfrak{K}_m \neq \emptyset\}} \mathrm{d}G =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} s_m \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m. \tag{4.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

Schimbînd ordinea de integrare

$$I = \int\limits_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} \mathrm{d}G \int\limits_{\{K_i \cap \lambda \neq \emptyset\}} \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m$$

λ fiind lungimea coardei interceptate de K_0 pe dreapta G. Dacă ţinem seama de relaţia (3.5) avem

$$(4.21) \qquad \int\limits_{\{K \cap \lambda \neq \emptyset\}} \mathrm{d}K = O_1 O_2 \ldots O_{n-2}\left[O_{n-1} V_n(K) - O_{n-2} \frac{\lambda}{n-1} V_{n-1}(\partial K)\right]$$

şi deci

(4.22)

$$I = (O_1 O_2 \ldots O_{n-2})^m \int\limits_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} \left[O_{n-1} V_n(K) + O_{n-2} \frac{\lambda}{n-1} V_{n-1}(\partial K)\right]^m \mathrm{d}G.$$

Egalînd cele două valori ale lui I avem

$$(4.23) \qquad \int\limits_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap Km) \neq O\}} s_m \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m =$$

$$= \frac{(n-1)\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} (O_1 O_2 \ldots O_{n-2})^m \int\limits_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} \left[O_{n-1} V_n(K) + O_{n-2} \frac{\lambda V_{n-1}(\partial K)}{n-1}\right]^m \mathrm{d}G$$

Ţinînd seama de formula (2.3.cap. 3) avem

(4.24)

$$E[s_m] = \frac{(n-1)\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}} O_{n-1}^m} \cdot \frac{\int\limits_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} \left[O_{n-2} V_n(K) + O_{n-2} \frac{\lambda V_{n-1}(\partial K)}{n-1}\right]^m \mathrm{d}G}{\left[V_n(K) + V_n(K_0) + \frac{1}{n O_{n-1}} \sum\limits_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h(\partial K_0) M_{n-h-2}(\partial K)\right]^m}.$$

Dacă K_0 este o hipersferă de rază R_0 şi K o hipersferă de rază R

$$V_n(K_0) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R_0^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \quad V_n(K) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \quad V_{n-1}(\partial K) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

$$O_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad O_{n-2} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \quad M_h(\partial K_0) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} R_0^{n-h-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad M_h(\partial K) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} R^{n-h-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Scanned with OKEN Scanner

și (4.24) devine

$$E[s_m] = \frac{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \frac{R^{mn}}{(R+R_0)^{mn}} \times$$

(4.25)

$$\times \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot \left[\frac{\frac{n}{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right]^k \frac{1}{R^k} \int\limits_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} \lambda^k dG$$

Sau ținînd seama de [92]

(4.26)
$$\int\limits_{\{G \cap K_0 \neq \emptyset\}} \lambda^k dG = \frac{2^{n+k-2}\pi^{n-1}}{(n-2)!} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{k+2}{2}\right) R_0^{n+k-1}$$

$$E[s_m] = \frac{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!} \cdot \frac{R_0^{n-1}}{\left(1+\frac{R_0}{R}\right)^{mn}} \times$$

(4.27)

$$\times \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left[\frac{\frac{2n}{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right]^k B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{k+2}{2}\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^k.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 3

REȚELE ÎNTR-UN SPAȚIU OMOGEN

§3.1. REȚELE DINTR-UN SPAȚIU OMOGEN CU n DIMENSIUNI.

Fie (X^n, G_r) un spațiu omogen cu n dimensiuni de coordonate $x^1, x^2, \ldots, x^n$, G_r fiind grupul maxim de mișcări (tranzitiv) al acestui spațiu, definit de ecuațiile:

$$y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^r) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

unde $a^1, \ldots, a^r$ sînt parametrii grupului.

Definiție. Numim rețea regulată $\mathfrak{R}$ într-un spațiu omogen X^n cu grup G_r, un șir de domenii n-dimensionale $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ care satisfac condițiile:

1. Fiecare punct al spațiului aparține unui singur domeniu α_i.

2. Fiecare domeniu α_i poate fi suprapus peste α_0 printr-o mișcare $T_i \in G_r$ a spațiului care suprapune fiecare domeniu α_k peste α_k, deci printr-o mișcare a spațiului care lasă invariantă rețeaua.

Numim domeniul α_0 celulă fundamentală a rețelei, iar un domeniu oarecare α_k, o celulă a acesteia.

Fie K_0 o figură fixă conținută în celula fundamentală α_0 și K o figură oarecare din spațiul X^n.

Notăm cu $\mathfrak{K}$ mulțimea figurilor G_r — echivalente cu K, adică mulțimea figurilor obținute din K prin mișcări ale grupului G_r, și cu $\mathrm{d}_{G_r}K$ măsura elementară cinematică a grupului G_r [66][1].

Dacă notăm cu $\omega^h(a, \mathrm{d}a) = \varphi^h_k(a)\mathrm{d}a^k$ cele r forme Pfaff invariante ale grupului G_r (componentele relative ale acestuia), avem [66]

$$\mathrm{d}_{G_r}K = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^r \tag{1.2}$$

unde am notat prin $\alpha \wedge \beta$ produsul exterior al formelor diferențiale α, β.

Să considerăm acum integrala

$$I = \int_{\{K_0 \cap K \neq \emptyset\}} f(K_0 \cap K)\mathrm{d}K \tag{1.3}$$

unde f este o funcție integrabilă de figura $K_0 \cap K$ (nulă dacă $K_0 \cap K = \emptyset$).

[1] pag. 29

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de condiţia 1, din definiţie rezultă că reţeaua $\mathfrak{R}$ formează o acoperire a spaţiului X^n, deci putem scrie:

$$I = \sum_i \int_{\alpha_i} f(K_0 \cap K)\mathrm{d}_{G_r}K.$$

Să aplicăm acum spaţiului X^n mişcarea $T_i \in G_r$ pentru care avem $T_i\alpha_i = \alpha_0$. Prin această mişcare figura K se transformă în figura $K_i = T_iK$.

Avînd în vedere că măsura elementară cinematică este invariantă la mişcările grupului G_r, rezultă

$$\mathrm{d}_{G_r}K_i = \mathrm{d}_{G_r}K$$

deci

$$I = \sum_i \int_{\alpha_i} f(K_0 \cap K)\mathrm{d}_{G_r}K = \sum_i \int_{\alpha_0} f(K_0 \cap T_i^{-1}K_i)\mathrm{d}_{G_r}K =$$

$$= \sum_i \int_{\alpha_0} f(K_0 \cap T_i^{-1}K_i)\mathrm{d}_{G_r}K_i = \sum_i \int_{\alpha_0} f(K_0 \cap T_i^{-1}K)\mathrm{d}_{G_r}K$$

Ţinînd seama că figura $K_0 \cap T_i^{-1}K$ este congruentă cu figura $T_iK_0 \cap K$ rezultă

$$I = \int_{\alpha_0} [\sum_i f(T_iK_0 \cap K)]\mathrm{d}_{G_r}K.$$

De aici şi din (1.3) deducem formula

$$(1.4) \qquad \int_{\{K_0 \cap K \neq \emptyset\}} f(K_0 \cap K)\mathrm{d}_{G_r}K = \int_{\alpha_0} [\sum_i f(T_iK_0 \cap K)]\mathrm{d}_{G_r}K.$$

Să considerăm acum o figură fixă $K_0 \subset \alpha_0$ şi fie $\{K_1, \ldots, K_m\}$ un sistem format din m figuri oarecare, egale între ele. Cu aceste notaţii să considerăm integrala:

$$(1.5) \quad J = \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} f[K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)]\mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m$$

unde f este o funcţie integrabilă de figura $K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)$ nulă dacă $K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) = \emptyset$.

Ca şi mai sus avem

$$J = \sum_i \int_{\alpha_i} f[K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)]\mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m.$$

Vom aplica spaţiului X^n mişcarea $T_i \in G_r$ pentru care $T_i\alpha_i = \alpha_0$ şi vom nota $K_h^i = T_iK_h$. Avem

$$\mathrm{d}_{G_r}K_h^i = \mathrm{d}_{G_r}K_h$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci

$$J=\sum_i \int_{\alpha_i} f[K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)]\mathrm{d}_{G_r}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}_{G_r}K_m =$$

$$=\sum_i \int_{\alpha_0} f[K_0 \cap (T_i^{-1}K_1^i \cap \ldots \cap T_i^{-1}K_m^i)]\mathrm{d}_{G_r}K_1^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}_{G_r}K_m =$$

$$=\sum_i \int_{\alpha_0} f[K_0 \cap (T_i^{-1}K_1^i \cap \ldots \cap T_i^{-1}K_m^i)]\mathrm{d}_{G_r}K_1^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}_{G_r}K_m^i =$$

$$=\sum_i \int_{\alpha_0} f[K_0 \cap (T_i^{-1}K_1 \cap \ldots \cap T_i^{-1}K_m)]\mathrm{d}_{G_r}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}_{G_r}K_m.$$

Dar figura $K_0 \cap (T_i^{-1}K_1 \cap \ldots \cap T_i^{-1}; K_m)$ este congruentă cu figura $T_iK_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)$ deci

$$J=\int_{\alpha_0} \sum_i [f(T_iK_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)]\mathrm{d}_{G_r}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}_{G_r}K_m.$$

De aici și din (1.5) rezultă formula

$$\int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} f[K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)]\mathrm{d}_{G_r}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}_{G_r}K_m =$$

(1.6)

$$= \int_{\alpha_0} \sum_i f[T_iK_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)]\mathrm{d}_{G_r}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}_{G_r}K_m.$$

§3.2. REȚELE ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN R_n.

Fie R_n spațiul euclidian cu n dimensiuni de coordonate carteziene ortogonale $x^1, \ldots, x^n$, al cărui grup maxim de mișcări este grupul ortogonal $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$ de ecuații

(2.1) $$x'^i = \alpha_j^i x^j + \alpha^i, \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

unde parametrii α_j^i satisfac relațiile de ortogonalitate

$$\alpha_h^i \alpha_k^h = \delta_k^i.$$

Cu aceste valori formula (1.2) devine [61]²

(2.2) $$\mathrm{d}K = \prod_{i=1}^{n} \omega^i \wedge \prod_{i<j} \omega_i^j \qquad (\pi - \text{produs exterior})$$

unde ω^i sînt componentele relative la translațiile grupului (2.1) iar ω_i^j sînt componentele relative la rotațiile aceluiași grup, sau

(2.2′) $$\mathrm{d}K = \mathrm{d}P \wedge \prod_{i<j} \omega_i^j$$

unde P este punctul de coordonate $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm în spaţiu o reţea regulată $\mathfrak{R}$ a cărei celulă fundamentală este α_0 şi să presupunem că figura K_0 este un domeniu n-dimensional de volum V_0 şi a cărui frontieră ∂K_0 este o hipersuprafaţă compactă, orientabilă, care are aria S_0, iar figura K este un domeniu n-dimensional de volum V şi a cărui frontieră ∂K este o hipersuprafaţă compactă, orientabilă, de arie S. Atunci avem formula cinematică fundamentală a lui Chern-Yien [11][2]

$$\int_{\{K_0 \cap K \neq \emptyset\}} \chi(K_0 \cap K)\mathrm{d}K = O_1 \ldots O_{n-2}\Big\{O_{n-1}[\chi(K_0)V + V_0\chi(K) +$$

(2.3)

$$+ \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1} M_h^{(0)} M_{n-2-h}\Big\}$$

unde am notat prin $\chi(K_0 \cap K)$ caracteristica lui Euler-Poincaré a domeniului $K_0 \cap K$ şi

$$O_i = \int_{S^i} \mathrm{d}O_i = \frac{2\pi^{\frac{i+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)},$$

cu

$$\mathrm{d}O_{n-h} = \omega_h^{h+1} \wedge \omega_h^{h+2} \wedge \ldots \wedge \omega_h^n, \qquad (h = 1, \ldots, n-1).$$

S^i fiind sfera euclidiană i-dimensională de rază unitate iar

$$M_r^{(0)} = \frac{1}{\binom{n-1}{r}} \int_{\partial K_0} \{R_1, \ldots, R_{n-1}\}_r \mathrm{d}\sigma_0, \quad M_r = \frac{1}{\binom{n-1}{r}} \int_{\partial K} \{R_1, \ldots, R_{n-1}\}_r \mathrm{d}\sigma,$$

$\{R_1, \ldots, R_{n-1}\}_r$ fiind funcţia simetrică elementară de ordinul r a celor $n-1$ curburi principale ale hipersuprafeţei ∂K_0, respectiv ∂K, iar $\mathrm{d}\sigma_0$ şi $\mathrm{d}\sigma$ elementele de arii pe aceste hipersuprafeţe.

Cu această notaţie formula (2.2′) devine [67][3]

(2.4) $$\mathrm{d}K = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}O_{n-1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}O_1.$$

Să luăm acum în formula (1.4), $f(K_0 \cap K) = \chi(K_0 \cap K)$ şi să ţinem seama de (2.3). Obţinem

$$\int_{\alpha_0} \chi_{01}\mathrm{d}K = O_1O_2 \ldots O_{n-2}\Big\{O_{n-1}[V\chi(K_0) + V_0\chi(K)] +$$

(2.5)

$$+ \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1} M_h^{(0)} M_{n-2-h}\Big\},$$

unde χ_{01} este caracteristica lui Euler-Poincaré a intersecţiei lui K cu domeniile T_iK_0 adică cu reţeaua generată prin reproducerea lui K_0 în fiecare celulă α_i.

[2] pag. 119
[3] pag. 187

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, integrînd egalitatea (2.4) pentru $P \in \alpha_0$ obținem

$$\int_{\alpha_0} dK = v_0 O_1 O_2 \dots O_{n-1}, \tag{2.6}$$

unde v_0 este volumul celulei α_0.

De aici și din (2.5) deducem valoarea medie a caracteristicei χ_{01}

$$E[\chi_{01}] = \frac{1}{v_0}\left[V\chi(K_0) + V_0\chi(K) + \frac{1}{nO_{n-1}}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M_h^{(0)}M_{n-2-h}\right]. \tag{2.5'}$$

Să considerăm acum cazul în care domeniile K_0 și K sînt simplu conexe. În acest caz, notînd cu ν numărul de componente simplu conexe ale intersecției $K_0 \cap K$ avem:

$$\chi(K) = \chi(K_0) = 1, \ \chi(K_0 \cap K) = \nu.$$

și formula (2.3) devine

$$\int_{\{K_0 \cap K \neq \emptyset\}} \nu dK = O_1 \dots O_{n-2}\left[O_{n-1}(V_0 + V) + \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M_h^{(0)}M_{n-2-h}\right]. \tag{2.7}$$

Luăm acum în (1.4) $f(K_0 \cap K) = \nu$ și ținînd seama de (2.7) deducem

$$\int_{\alpha_0} \nu_{01} dK = O_1 \dots O_{n-2}\left[O_{n-1}(V_0 + V) + \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M_h^{(0)}M_{n-2-h}\right] \tag{2.8}$$

unde ν_{01} este numărul de componente simplu conexe ale intersecției dintre domeniul K și domeniile $T_i K_0$, adică cu rețeaua generată prin reproducerea lui K_0 în fiecare celulă α_i

Din (2.8) și (2.6) obținem:

$$E[\nu_{01}] = \frac{V_0 + V}{v_0} + \frac{1}{nv_0 O_{n-1}}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M_h^{(0)}M_{n-2-h}. \tag{2.8'}$$

De aici rezultă

Teorema 2.1. Fie în spațiul R_n o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0. Dacă domeniul n-dimensional simplu conex $K_0 \subset \alpha_0$ are volumul V_0, atunci putem găsi totdeauna o poziție a unui domeniu n-dimensional simplu conex K, de volum V, astfel încît intersecția $K_0 \cap K$ să aibă cel puțin

$$\left[\frac{V_0 + V}{v_0} + \frac{1}{nv_0 O_{n-1}}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M_h^{(0)}M_{n-2-h}\right]$$

([a] reprezintă cel mai mare întreg cuprins în a) componente simplu conexe.

Scanned with OKEN Scanner

În particular, dacă $K_0 = \alpha_0 \cup \partial\alpha_0$, avem $V_0 = v_0$ și notînd $M_h^{(0)} = m_h$ formula (2.5') devine:

$$E[\nu_{01}] = 1 + \frac{V}{v_0} + \frac{1}{nv_0O_{n-1}} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} m_h M_{n-2-h}, \tag{2.8''}$$

și avem deci:

Teorema 2.2. Orice domeniu n-dimensional simplu conex K de volum V, din spațiul R_n poate fi acoperit cu

$$N \leqslant 1 + \frac{V}{v_0} + \frac{1}{nv_0O_{n-1}} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} m_h M_{n-2-h}$$

celule ale unei rețele regulate a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0.

În cazul unei rețele formate din cuburi n-dimensionale de latură a avem [91][4]

$$m_h = \frac{n}{h+1} O_h a^{n-h-1}$$

și formula (2.8'') devine [67][5]

$$N \leqslant 1 + \frac{V}{a^n} + \frac{1}{O_{n-1}} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} \frac{O_n}{(h+a)^{h+1}} M_{n-2-h}.$$

Să presupunem acum că, K_0 este o varietate p-dimensională închisă V_p de volum $\sigma(V_p)$, iar K o varietate q-dimensională închisă V_q de volum $\sigma(V_q)$, $(p + q \geqslant n)$. Atunci, notînd cu $\sigma(V_p \cap V_q)$ volumul intersecției $V_p \cap V_q$ avem formula lui Santaló [62][6].

$$\int_{\{V_p \cap V_q \neq \emptyset\}} \sigma(V_p \cap V_q) dK = \frac{O_1O_2 \dots O_{p+q-n}}{O_pO_q} \sigma(V_p)\sigma(V_q). \tag{2.9}$$

Ținînd seama de această formulă și luînd în (1.4) $f(K_0 \cap K) = \sigma(V_p \cap V_q)$, obținem

$$\int_{\alpha_0} \sigma_{pq} dK = \frac{O_1O_2 \dots O_{p+q-n}}{O_pO_q} \sigma(V_p)\sigma(V_q) \tag{2.9'}$$

unde σ_{pq} este volumul intersecției lui V_q cu varietățile T_iV_p adică cu rețeaua generată prin reproducerea lui V_p în fiecare celulă α_i.

Deci din (2.9') și (2.6) deducem valoarea medie

$$E[\sigma_{pq}] = \frac{O_nO_{p+q-n}}{O_pO_q} \cdot \frac{\sigma(V_p)\sigma(V_q)}{v_0} \tag{2.9''}$$

De aici rezultă

---

[4] pag. 187
[5] pag. 54
[6] pag. 188

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.3. Fie în spaţiul R_n o reţea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0. Dacă varietatea p-dimensională închisă $V_p \subset \alpha_0$ are volumul $\sigma(V_p)$, atunci există cel puţin o poziţie a unei varietăţi q-dimensionale închise V_q de volum $\sigma(V_q)$, $(p+q \geqslant n)$, astfel încît volumul intersecţiei $V_p \cap V_q$ să fie

$$\sigma(V_p \cap V_q) \geqslant \frac{O_n O_{p+q-n}}{O_p O_q} \cdot \frac{\sigma(V_p)\sigma(V_q)}{v_0}$$

Dacă $p+q=n$, deci dacă varietăţile V_p şi V_q sînt complementare, atunci $\sigma_{pq} = N_{p,n-p}$ (numărul de puncte de intersecţie ale varietăţilor V_p şi V_q) şi formula (2.9'') devine

$$E[N_{p,n-p}] = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma(V_p)\sigma(V_q)}{v_0}.$$

Avem deci

Teorema 2.4. Fie în spaţiul R_n o reţea regulată, a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0. Dacă varietatea p-dimensională închisă $V_p \subset \alpha_0$ are volumul $\sigma(V_p)$, atunci există cel puţin o poziţie a unei varietăţi complementare $(n-p)$-dimensionale închise V_{n-p}, de volum $\sigma(V_{n-p})$, astfel încît cele două varietăţi să aibă cel puţin

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma(V_p)\sigma(V_q)}{v_0}$$

puncte de intersecţie.

În sfîrşit, dacă $p=q=n$, deci dacă cele două varietăţi sînt două corpuri n-dimensionale $V_n^{(0)}$ şi $V_n^{(1)}$, atunci formula (2.9'') devine

$$E[\sigma_n^{(01)}] = \frac{\sigma_n^{(0)}\sigma_n^{(1)}}{v_0}$$

unde $\sigma_n^{(0)}$ şi $\sigma_n^{(1)}$ sînt, respectiv, volumele celor două corpuri, iar $\sigma_n^{(01)}$ este volumul intersecţiei $V_n^{(0)} \cap V_n^{(1)}$.

Avem deci

Teorema 2.5. Fie în spaţiul R_n o reţea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0. Dacă corpul n-dimensional $V_n^{(0)} \subset \alpha_0$ are volumul $\sigma_n^{(0)}$, atunci există cel puţin o poziţie a unui corp n-dimensional $V_n^{(1)}$, de volum $\sigma_n^{(1)}$, astfel încît volumul intersecţiei celor două corpuri n-dimensionale să fie

$$\sigma(V_n^{(0)} \cap V_n^{(1)}) \geqslant \frac{\sigma_n^{(0)}\sigma_n^{(1)}}{v_0}.$$

Vom presupune acum că figura fixă K_0 este o varietate p-dimensională închisă V_p de volum $\sigma(V_p)$ iar figura mobilă K este formată din varietăţi închise $V_{q_1}, V_{q_2}, \ldots, V_{q_h}$ de dimensiuni, respectiv $q_1, q_2, \ldots, q_h$ şi de volume $\sigma(V_{q_1}), \sigma(V_{q_2})$,

Scanned with OKEN Scanner

$\ldots, \sigma(V_{q_h})$. Atunci, notînd cu $\sigma(V_p \cap V_{q_1} \cap \ldots \cap V_{q_h})$ volumul intersecției $V_p \cap V_{q_1} \cap \ldots \cap V_{q_h}$ avem [65][7]

$$\int_{\{V_p \cap V_{q_1} \cap \ldots \cap V_{q_h} \neq \emptyset\}} \sigma(V_p \cap V_{q_1} \cap \ldots \cap V_{q_h}) dK = \frac{(O_1 O_2 \ldots O_n)^h O_{p+q_1+\ldots+q_h-nh}}{O_p O_{q_1} \ldots O_{q_h}} \times$$

(2.10)

$$\times \sigma(V_p)\sigma(V_{q_1}) \ldots \sigma(V_{q_h}).$$

Ținînd seama de această formulă și luînd în (1.4) $f(K_0 \cap K) = \sigma(V_p \cap V_{q_1} \cap \ldots \cap V_{q_h})$ obținem:

$$(2.10') \quad \int_{\alpha_0} \sigma_{pq_1 \ldots q_h} dK = \frac{(O_1 O_2 \ldots O_n)^h O_{p+q_1+\ldots+q_h-nh}}{O_p O_{q_1} \ldots O_{q_h}} \sigma(V_p)\sigma(V_{q_1}) \ldots \sigma(V_{q_h})$$

unde $\sigma_{pq_1 \ldots q_h}$ este volumul intersecției dintre $(V_{q_1} \cap \ldots \cap V_{q_h})$ și rețeaua generată prin reproducerea lui V_p în fiecare celulă α_i.

Din (2.10') și (2.6) deducem

$$(2.10'') \quad E[\sigma_{pq_1 \ldots q_h}] = \frac{(O_1 O_2 \ldots O_n)^h O_{p+q_1+\ldots+q_h-nh}}{O_p O_{q_1} \ldots O_{q_h}} \cdot \frac{\sigma(V_p)\sigma(V_{q_1}) \ldots \sigma(V_{q_h})}{v_0}.$$

De aici rezultă

Teorema 2.6. Fie în spațiul R_n o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0. Dacă varietatea p-dimensională închisă $V_p \subset \alpha_0$ are volumul $\sigma(V_p)$, atunci există cel puțin o poziție a unui sistem de h varietăți închise $\{V_{q_1}, \ldots, V_{q_h}\}$ de dimensiuni respectiv, $q_1, q_2, \ldots, q_h$ și de volume $\sigma(V_{q_1}), \sigma(V_{q_2}), \ldots, \sigma(V_{q_h})$, $(p + q_1 + \ldots + q_h \geq nh)$, astfel încît volumul intersecției $V_p \cap V_{q_1} \cap \ldots \cap V_{q_h}$ să fie

$$\sigma(V_p \cap V_{q_1} \cap \ldots \cap V_{q_h}) \geq \frac{(O_1 O_2 \ldots O_n)^h O_n O_{p+q_1+\ldots+q_h-nh}}{O_p O_{q_1} \ldots O_{q_h}} \cdot \frac{\sigma(V_p)\sigma(V_{q_1}) \ldots \sigma(V_{q_h})}{v_0}.$$

Să presupunem acum că figura K_0 este formată din m puncte (considerate ca sfere n-dimensionale de rază nulă). În acest caz avem

$$\chi(K_0) = m, \quad V_0 = 0, \quad M_h^{(0)} = 0, \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-2)$$

și formula (2.3) devine

$$\int_{\{K_0 \cap K \neq \emptyset\}} \eta dK = O_1 O_2 \ldots O_{n-1} \cdot m \cdot V$$

unde η este numărul de puncte (din cele m care formează figura K_0) situate în interiorul unei poziții a lui K.

Cu această formulă, (1.4) ne dă

$$\int_{\alpha_0} \eta_{01} dK = O_1 O_2 \ldots O_{n-1} m V,$$

[7] pag. 56

Scanned with OKEN Scanner

unde η_{01} reprezintă numărul de puncte, ale rețelei generate prin reproducerea lui K_0 în toate celulele α_i, conținute în interiorul lui K.

De aici și din (2.6) deducem

$$E\,[\eta_{01}] = \frac{mV}{v_0}.$$

Să considerăm acum că figura K_0 este un corp n-dimensional convex de volum V_0 iar sistemul $\{K_1, \ldots, K_m\}$ este format din m corpuri n-dimensionale convexe, egale, independente între ele, de volum V.

Dacă notăm cu $v_{m,r}$ volumul corpului n-dimensional (format din una sau mai multe componente simplu conexe) interior lui K_0 obținut ca intersecție a numai r din cele m corpuri $K_1, \ldots, K_m$ atunci avem formula [76]:

$$\int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} v_{m,r}\,dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = \binom{m}{r}(O_1O_2 \ldots O_{n-1}V)^r \cdot$$

$$\cdot\left[O_1O_2 \ldots O_{n-1}V_0 + O_1O_2 \ldots O_{n-2}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j+1}M_j^{(0)}M_{n-2-j}\right]^{m-r} V_0$$

Luînd în (1.6) $f = v_{m,r}$ și ținînd seama de această formulă, rezultă:

$$\int_{\alpha_0} v_{m,r}^{(01)}\,dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = \binom{m}{r}(O_1O_2 \ldots O_{n-1}V)^r\left[O_1O_2 \ldots O_{n-1}V_0 + \right.$$

(2.11)

$$\left. + O_1O_2 \ldots O_{n-2}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j+1}M_j^{(0)}M_{n-2-j}\right]^{m-r} V_0,$$

unde $v_{m,r}^{(01)}$ este volumul părții interioare rețelei generată de reproducerea lui K_0 în toate celulele α_i ale corpului obținut ca intersecție a numai r din cele m corpuri $K_1, \ldots, K_m$.

Pe de altă parte, ținînd seama că $K_1, \ldots, K_m$ sînt independente, din (2.6) rezultă

$$\int_{\alpha_0} dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = (v_0O_1O_2 \ldots O_{n-1})^m.$$

De aici și din (2.11) deducem valoarea medie

$$E[v_{m,r}^{(01)}] = \frac{\binom{m}{r}\left[O_{n-1}V_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j+1}M_j^{(0)}M_{n-2-j}\right]^{m-r} V^r \cdot V_0}{v_0^m O_{n-1}^{m-r}}. \tag{2.11'}$$

Avem deci

Teorema 2.7. Fie în spațiul R_n o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0. Dacă corpul n-dimensional convex $K_0 \subset \alpha_0$ are volumul V_0, atunci există cel puțin o poziție a unui sistem format din m corpuri n-dimensionale convexe, egale, independente între ele, de volume V, astfel

Scanned with OKEN Scanner

încît volumul intersecției dintre K_0 și corpul obținut ca intersecție a numai r din cele m corpuri să fie cel puțin egale cu

$$\frac{\binom{m}{r}\left[O_{n-1}V_0+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j+1}M_j^{(0)}M_{n-2-j}\right]^{m-r}V^rV_0}{v_0^mO_{n-1}^{m-r}}.$$

Dacă $m=r$, notînd $v_{m,m}^{(01)}=v_m^{(01)}$, formula (2.11') devine:

$$E[v_m^{(01)}]=\frac{V^mV_0}{v_0^m}$$

și avem deci:

Teorema 2.8. Fie în spațiul R_n o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0. Dacă corpul n-dimensional convex $K_0\subset\alpha_0$ are volumul V_0, atunci există cel puțin o poziție a unui sistem de m corpuri n-dimensionale convexe, independente între ele, de volume V, astfel încît volumul intersecției celor $m+1$ corpuri n-dimensionale convexe să fie cel puțin egal cu

$$\frac{V^mV_0}{v_0^m}.$$

§3.3. REȚELE ÎN PLANUL EUCLIDIAN

Fie R_2 planul euclidian de coordonate carteziene ortogonale x, y al cărui grup de mișcări este grupul ortogonal G_3:

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi+\alpha$$
$$y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi+\beta.$$

Măsura elementară cinematică în acest plan este

$$dK=dP\wedge d\varphi$$

unde $P(x,y)$ este un punct oarecare din plan.

De aici rezultă că

$$\int_{\alpha_0}dK=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{P\in\alpha_0}dP=2\pi s_0 \tag{3.1}$$

unde s_0 este aria celulei fundamentale α_0.

Dacă K_0 este un domeniu de arie S_0 și a cărui frontieră ∂K_0 are lungimea L_0, iar K este un domeniu de arie S și a cărui frontieră ∂K are lungimea L, atunci avem formula lui Blaschke [5][9]

$$\int_{(K_0\cap K\neq\emptyset)}\chi(K_0\cap K)dK=2\pi[S_0\chi(K)+S\chi(K_0)]+L_0L.$$

[9] pag. 38

Scanned with OKEN Scanner

Luînd în (1.4) $f(K_0 \cap K) = \chi(K_0 \cap K)$ și ținînd seama de această formulă, obținem

$$\int_{\alpha_0} \chi_{01} dK = 2\pi[S_0\chi(K) + S\chi(K_0)] + L_0 L \tag{3.2}$$

unde χ_{01} este caracteristică lui Euler-Poincaré a intersecției lui K cu rețeaua generată prin reproducerea lui K_0 în fiecare celulă α_i

De aici și din (3.2) rezultă

$$E[\chi_{10}] = \frac{S_0\chi(K) + S\chi(K_0)}{s_0} + \frac{L_0 L}{2\pi s_0}. \tag{3.2'}$$

Dacă presupunem că domeniile K_0 și K sînt simplu conexe, avem $\chi(K_0) = \chi(K) = 1$ și notînd cu ν_{01} numărul de componente simplu conexe din care este formată intersecția dintre K și rețeaua generată prin reproducerea lui K_0 în fiecare celulă α_i, avem $\chi_{01} = \nu_{01}$ și formula (3.2') devine:

$$E[\nu_{01}] = \frac{S_0 + S}{s_0} + \frac{L_0 L}{2\pi s_0}. \tag{3.3}$$

În particular, dacă $K_0 = \alpha_0 \cup \partial\alpha_0$ notînd cu η numărul de regiuni în care este împărțit K de către rețeaua $\mathfrak{R}$, din (3.3) rezultă:

$$E[\eta] = 1 + \frac{S}{s_0} + \frac{l_0 L}{2\pi s_0}$$

unde l_0 este lungimea frontierei $\partial\alpha_0$

Avem deci teorema lui Hadwiger [41]:

Orice domeniului simplu conex K de arie S și a cărui frontieră ∂K are lungimea L, poate fi acoperit cu

$$N \leqslant 1 + \frac{S}{s_0} + \frac{l_0 L}{2\pi s_0}$$

celule ale unei rețele, a cărei celulă fundamentală are aria s_0 și frontiera de lungime l_0.

Să presupunem acum că figurile K_0 și K sînt curbe de lungime L_0, respectiv L. Atunci, notînd cu n numărul de puncte de intersecție dintre K_0 și K, avem formula lui Poincaré [66][10]

$$\int_{\{K_0 \cap K \neq \emptyset\}} n dK = 4L_0 L.$$

Luînd deci în (1.4) $f(K_0 \cap K) = n$, obținem [62][11]

$$\int_{\chi_0} n_{01} dK = 4L_0 L \tag{3.4}$$

[10] pag. 31
[11] pag. 291

Scanned with OKEN Scanner

unde n_{01} este numărul de puncte de intersecție ale curbei K cu rețeaua generată prin reproducerea lui K_0 în fiecare celulă α_i.

De aici și din (3.1) deducem valoarea medie

$$E[n_{01}] = \frac{2L_0L}{\pi s_0}. \tag{3.4'}$$

În particular, dacă $K_0 = \partial\alpha_0$ rezultă

$$E[n_{01}] = \frac{2l_0L}{\pi s_0}.$$

Avem deci

Teorema 3.1. Fiind dată în planul euclidian o rețea regulată a cărei celulă fundamentală are aria s_0 și frontiera $\partial\alpha_0$ de lungime l_0, putem găsi totdeauna o poziție a unei curbe K de lungime L care să aibă cel puțin $\left[\frac{2l_0L}{\pi s_0}\right]$ puncte de intersecție cu rețeaua.

Presupunînd că curbele K_0 și K se pot intersecta în n_1 sau n_2 puncte și notînd cu p_1, respectiv p_2 probabilitățile corespunzătoare, formula (3.4) devine

$$n_1p_1 + n_2p_2 = \frac{2L_0L}{\pi s_0}$$

de unde, ținînd seama că $p_1 + p_2 = 1$, rezultă:

$$p_1 = \frac{\pi s_0n_2 - 2L_0L}{\pi s_0(n_2 - n_1)}, \quad p_2 = \frac{2L_0L - \pi s_0n_1}{\pi s_0(n_2 - n_1)}.$$

Să presupunem acum că figura K_0 este formată din m puncte și să luăm $f(K_0 \cap K)$ = numărul de puncte din K_0 conținute în K. Avem $S_0 = L_0 = 0$, $\chi(K_0) = m$ (considerăm punctele ca cercuri de rază nulă). Cu aceasta formula (3.2) devine

$$\int_{\alpha_0} \mu_{01}\mathrm{d}K = 2\pi mS. \tag{3.5}$$

unde μ_{01} este numărul de puncte din K ale rețelei generată prin reproducerea lui K_0 în fiecare celulă α_i, iar formula (3.2') devine

$$E[\mu_{01}] = \frac{mS}{s_0}.$$

Să ne ocupăm acum de cazul în care K_0 este un oval de arie S_0 și al cărui contur are lungimea L_0 și să considerăm un sistem format din m ovale mobile, egale, independente între ele, $\{K_1, \ldots, K_m\}$ de arii S și ale căror contururi au lungimile L. Notînd cu $\mathfrak{K}_{m,r}$ figura obținută ca intersecție a numai r din cele m ovale $K_1, \ldots, K_m$ cu $s_{m,r}$ aria figurii $\mathfrak{K}_{m,r} \cap K_0$, cu $l_{m,r}$ lungimea

Scanned with OKEN Scanner

frontierei $\partial(\mathcal{K}_{m,r} \cap K_0)$ și cu $N_{m,r}$ numărul de componente convexe din care este formată intersecția $\mathcal{K}_{m,r} \cap K_0$, avem formulele lui Santaló [64]

$$(3.6)\qquad \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} s_{m,r}\, dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m =$$

$$= \binom{m}{r} (2\pi S)^r (2\pi S_0 + L_0 L)^{m-r} \cdot S_0,$$

$$(3.6')\qquad \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m \neq \emptyset\}} l_{m,r}\, dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = 2\pi \binom{m}{r} (2\pi S)^{r-1} (2\pi S_0 +$$

$$+ L_0 L)^{m-r-1} [(m-r) 2\pi S_0 S L + (2\pi S_0 + L_0 L)(S L_0 + \pi S_0 L)]$$

$$(3.6'')\qquad \int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} N_{m,r}\, dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = \binom{m}{r} (2\pi S)^{r-1} (2\pi S_0 +$$

$$+ L_0 L)^{m-r-1} \{2\pi S (m-r)(S_0 + L_0 L)] + (2\pi S_0 + L_0 L)[2\pi S +$$

$$+ r(S_0 + L_0 L)]\} + \binom{m}{r} \pi L^2 S_0 (2\pi S)^{r-2} (2\pi S_0 +$$

$$+ L_0 L)^{m-r-2} [(m-r)(m-r-1)(2\pi S)^2 + r(m-r) 4\pi S [2\pi S_0 +$$

$$+ L_0 L) + r(r-1)(2\pi S_0 + L_0 L)^2].$$

Luînd în (1.6) $f(K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)) = s_{m,r}$ și ținînd seama de (3.5') obținem

$$(3.7)\qquad \int_{\alpha_0} s_{m,r}^{(01)}\, dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = \binom{m}{r} (2\pi S)^r (2\pi S_0 + L_0 L)^{m-r} S_0,$$

unde $s_{m,r}^{(01)}$ este aria părții interioare rețelei generate prin reproducerea lui K_0 în toate celulele α_i, a figurii $\mathcal{K}_{m,r}$.

Ținînd seama că ovalele $K_1, \ldots, K_m$ sînt independente, din (3.1) rezultă:

$$(3.1')\qquad \int_{\alpha_0} dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = \int_{\alpha_0} dK_1 \ldots \int_{\alpha_0} dK_m = (2\pi s_0)^m.$$

Din (3.6) și (3.1') deducem valoarea medie

$$(3.7')\qquad E[s_{m,r}^{(01)}] = \binom{m}{r} \left(S_0 + \frac{L_0 L}{2\pi}\right)^{m-r} \frac{S_0 S^r}{s_0^m}.$$

Avem deci

Teorema 3.2. Fie în planul euclidian o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are aria s_0. Dacă ovalul $K_0 \subset \alpha_0$ are aria S_0 și lungimea frontierei L_0, atunci există cel puțin o poziție a unui sistem format din m ovale egale,

Scanned with OKEN Scanner

independente între ele, de arii S şi ale căror frontiere au lungimile L, astfel încît aria intersecţiei dintre K_0 şi figura obţinută ca intersecţie a numai r din cele m ovale să fie cel puţin egală cu:

$$\binom{m}{r}\left(S_0+\frac{L_0L}{2\pi}\right)^{m-r}\frac{S_0S^r}{s_0^m}.$$

Dacă $r=m$, notînd $s_{m,m}^{(01)}=s_m^{(01)}$, formula (3.7') devine

$$E[s_m^{(01)}]=\frac{S_0S^m}{s_0^m}$$

şi deci avem:

Teorema 3.3. Fie în planul euclidian o reţea regulată a cărei celulă fundamentală are aria s_0. Dacă ovalul $K_0\subset\alpha_0$ are aria S_0 şi lungimea frontierei L_0, atunci există cel puţin o poziţie a unui sistem format din m ovale egale, independente între ele, de arii S şi ale căror frontiere au lungimile L, astfel încît aria intersecţiei celor $m+1$ ovale să fie cel puţin egală cu

$$\frac{S_0S^m}{s_0^m}.$$

Luînd în (1.6) $f[K_0\cap(K_1\cap\ldots\cap K_m)]=l_{m,r}$ şi ţinînd seama de (3.5') obţinem:

$$\int_{\alpha_0} l_{m,r}^{(01)}\,dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m=2\pi\binom{m}{r}(2\pi S)^{r-1}(2\pi S_0+$$

$$+L_0L)^{m-r-1}[(m-r)2\pi S_0SL+(2\pi S_0+L_0L)(SL_0+rS_0L)]$$

unde $l_{m,r}^{(01)}$ este lungimea frontierei părţii interioare reţelei generată de reproducerea lui K_0 în toate celulele α_i, a figurii $\mathfrak{K}_{m,r}$.

De aici şi din (3.1') rezultă

$$E[l_{m,r}^{(01)}]=\binom{m}{r}\left(S_0+\frac{L_0L}{2\pi}\right)^{m-r-1}\left[(m-r)S_0SL+\right.$$

(3.8)

$$\left.+\left(S_0+\frac{L_0L}{2\pi}\right)(SL_0+rS_0L)\right]\frac{S^{r-1}}{S_0^m}.$$

Avem deci

Teorema 3.4. Fie în planul euclidian o reţea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are aria s_0. Dacă ovalul $K_0\subset\alpha_0$ are aria S_0 şi lungimea frontierei L_0, atunci există cel puţin o poziţie a unui sistem format din m ovale egale, independente între ele, de arii S şi ale căror frontiere au lungimile L, astfel încît lungimea frontierei intersecţiei dintre K_0 şi figura $\mathfrak{K}_{m,r}$ obţinută ca intersecţie a numai r din cele m ovale să fie cel puţin egală cu:

$$\binom{m}{r}\left(S_0+\frac{L_0L}{2\pi}\right)^{m-r-1}\left[(m-r)S_0SL+\left(S_0+\frac{L_0L}{2\pi}\right)(SL_0+rS_0L)\right]\frac{S^{r-1}}{s_0^m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $r = m$, notînd $l_{m,m}^{(01)} = l_m^{(01)}$ (3.8) devine

$$E[l_m^{(01)}] = \frac{(SL_0 + mS_0L)S^{m-1}}{s_0^m}$$

și deci avem:

Teorema 3.5. Fie în planul euclidian o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are aria s_0. Dacă ovalul $K_0 \subset \alpha_0$ are aria S_0 și lungimea frontierei L_0, atunci există cel puțin o poziție a unui sistem format din m ovale egale, independente între ele, de arii S și ale căror frontiere au lungimile L, astfel încît lungimea frontierei intersecției celor $m + 1$ ovale să fie cel puțin egală cu:

$$\frac{(SL_0 + mS_0L)S^{m-1}}{s_0^m}.$$

Luînd în (1.6) $f[K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)] = N_{m,r}$ și ținînd seama de (3.6''), obținem:

$$\int_{\alpha_0} N_{m,r}^{(01)} dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = \binom{m}{r} (2\pi S)^{r-1}(2\pi S_0 + L_0L)^{m-r-1}\{2\pi S(m - r)(S_0 + L_0L) + (2\pi S_0 + L_0L)[2\pi S + r(S_0 + L_0L)]\} +$$
$$+ \binom{m}{r} \pi L^2 S_0 (2\pi S)^{r-2}(2\pi S_0 + L_0L)^{m-r-2}[(m - r)(m - r - 1)(2\pi S)^2 +$$
$$+ r(m - r)4\pi S(2\pi S_0 + L_0L) + r(r - 1)(2\pi S_0 + L_0L)^2]$$

unde am notat cu $N_{m,r}^{(01)}$ numărul de componente convexe din care este formată partea interioară rețelei generată de reproducerea lui K_0 în toate celulele α_i, a figurii $\mathfrak{F}_{m,r}$.

De aici și din (3.1') rezultă:

$$E[N_{m,r}^{(01)}] = \frac{(2\pi S)^{r-1}(2\pi S_0 + L_0L)^{m-r-1}}{(2\pi s_0)^m}\{2\pi S(m - r)(S_0 + L_0L) +$$
$$+ (2\pi S_0 + L_0L)[2\pi S + r(S_0 + L_0L)]\} + \tag{3.9}$$
$$+ \binom{m}{r} \frac{\pi L^2 S_0 (2\pi S)^{r-2}(2\pi S_0 + L_0L)^{m-r-2}}{(2\pi s_0)^m}[(m - r)(m - r - 1)(2\pi S)^2 +$$
$$+ r(m - r)4\pi S(2\pi S_0 + L_0L) + r(r - 1)(2\pi S_0 + L_0L)^2].$$

Avem deci:

Teorema 3.6. Fie în planul euclidian o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are aria s_0. Dacă ovalul $K_0 \subset \alpha_0$ are aria S_0 și lungimea frontierei L_0, atunci există cel puțin o poziție a unui sistem format din m ovale egale, independente între ele, de arii S și ale căror frontiere au lungimile L, astfel încît intersecția dintre K_0 și figura obținută ca intersecție a numai r din cele m ovale, să fie formată din cel puțin $[E(N_{m,r}^{(01)})]$ componente convexe, numărul $E(N_{m,r}^{(01)})$ fiind dat de (3.9).

Dacă $K_0 = \alpha_0 \cup \partial\alpha_0$ notînd cu η numărul de regiuni în care este împărțită de către rețeaua $\mathcal{R}$ figura $\mathcal{K}_{m,r}$ din (3.9), obținem:

$$(3.9') \qquad E[\eta] = \binom{m}{r} \frac{(2\pi S)^{r-1}(2\pi s_0 + l_0 L)^{m-r-1}}{(2\pi s_0)^m} \{2\pi S(m-r)(s_0 + l_0 L) +$$

$$+ (2\pi s_0 + l_0 L)[2\pi S + r(s_0 + l_0 L)]\} +$$

$$+ \binom{m}{r} \frac{\pi L^2 s_0 (2\pi S)^{r-2}(2\pi s_0 + l_0 L)^{m-r-2}}{(2\pi s_0)^m} [(m-r)(m-r-1)(2\pi S)^2 +$$

$$+ r(m-r)4\pi S(2\pi s_0 + l_0 L) + r(r-1)(2\pi s_0 + l_0 L)^2]$$

unde l_0 este lungimea frontierei $\partial\alpha_0$.

De aici rezultă:

Teorema 3.7. Fie în planul euclidian o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are aria s_0 și a cărei frontieră are lungimea l_0. Atunci, fiind dat un sistem format din m ovale, independente între ele, de arii S și ale căror frontiere au lungimile L, figura obținută ca intersecție a numai r din aceste m ovale poate fi acoperită cu $N \leqslant E[\eta]$ celule ale rețelei, $E[\eta]$ fiind dat de (3.9').

Să aplicăm acum cîteva din rezultatele de mai sus unei rețele formate din dreptunghiuri de laturi a și b. Presupunînd că ∂K_0 este format din două laturi adiacente ale celulei fundamentale, avem $L_0 = a + b$ și formula (3.4) devine

$$(3.10) \qquad \int_{\alpha_0} n_{01} \mathrm{d}K = 4L(a+b).$$

Să presupunem acum că, K este un oval de lățime constantă[12] $h < \min(a,b)$ și să notăm cu μ_0, μ_1, μ_2 măsurile mulțimilor de ovale congruente cu K care intersectează respectiv zero, una sau două din dreptele rețelei.

Dar măsura mulțimii ovalelor congruente cu K, care intersectează celula fundamentală α_0 este

$$\mu = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{P \in \alpha_0} \mathrm{d}P = 2\pi ab$$

deci

$$(3.11) \qquad \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 2\pi ab$$

Pe de altă parte, măsura mulțimii ovalelor congruente cu un oval de lățime constantă h, interioare unui dreptunghi de laturi a, b este [79][13]

$$(3.11') \qquad \mu_0 = 2\pi[ab - h(a+b) + h^2]$$

---

[12] Un oval este de lățime constantă h dacă distanța dintre două tangente paralele cu o direcție oarecare este egală cu h.

[13] pag. 100

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, în acest caz formula (3.10) devine (avem $L = \pi h$)

$$2\mu_1 + 4\mu_2 = 4\pi h(a + b)$$

Din formulele (3.11), (3.11') deducem

$$\mu_1 = 2\pi h(a + b - 2h), \qquad \mu_2 = 2\pi h^2.$$

Dacă notăm cu p_0 probabilitatea ca un oval K de lățime constantă h să nu intersecteze dreptele rețelei și cu p_1 și p_2 probabilitățile ca ovalul K să intersecteze una, respectiv două drepte ale rețelei, avem:

$$p_0 = \frac{ab - h(a + b) - h^2}{ab}, \quad p_1 = \frac{h(a + b) - 2h^2}{ab}, \quad p_2 = \frac{h^2}{ab}.$$

§3.4. REȚELE ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN R_3

Fie R_3 spațiul eculidian cu trei dimensiuni de coordonate carteziene ortogonale x^1, x^2, x^3, al cărui grup de mișcări este grupul G_6 de ecuații

$$x'^i = \lambda^i_j x^j + \alpha^i, \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

unde $\lambda^i_h \lambda^h_j = \delta^i_j$.

Notînd cu θ, φ, ψ unghiurile lui Euler, putem scrie

$$\begin{aligned}
\lambda^1_1 &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
\lambda^2_1 &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
\lambda^3_1 &= \sin\psi\sin\theta,\\
\lambda^1_2 &= -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
\lambda^2_2 &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
\lambda^3_2 &= \cos\psi\cos\theta,\\
\lambda^1_3 &= \sin\varphi\sin\theta,\\
\lambda^2_3 &= -\cos\varphi\sin\theta,\\
\lambda^3_3 &= \cos\theta.
\end{aligned}$$

Dar $\omega^j_i = \lambda^j_h d\lambda^h_i$, $(i < j = 1, 2, 3)$ deci, ținînd seama de valorile lui λ^i_j deducem

$$\omega^2_1 \wedge \omega^3_1 \wedge \omega^3_2 = |\sin\theta| d\varphi \wedge d\theta \wedge d\psi$$

și formula (2.2') devine

$$dK = dP \wedge d\Omega \wedge d\psi$$

unde am notat $d\Omega = |\sin\theta| d\varphi \wedge d\theta$.

Cu aceasta rezultă

$$\int_{\alpha_0} dK = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \int_{P\in\alpha_0} dP = 8\pi^2 v_0. \tag{4.1}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că figura K_0 este un corp de volum V_0 şi a cărui frontieră ∂K_0 are aria S_0, iar figura K este un corp de volum V şi a cărui frontieră ∂K are aria S.

Formula (2.5) devine:

$$\int_{\alpha_0} \chi_{01} dK = 8\pi^2[V\chi(K_0) + V_0\chi(K)] + 2\pi(M_0^{(0)}M_1 + M_1^{(0)}M_0). \tag{4.2}$$

Dar

$$M_0^{(0)} = \int_{\partial K_0} d\sigma_0 = S_0, \qquad M_0 = \int_{\partial K} d\sigma = S,$$

iar

$$M_1^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{\partial K_0}\left(\frac{1}{R_1^{(0)}} + \frac{1}{R_2^{(0)}}\right)d\sigma_0, \quad M_1 = \frac{1}{2}\int_{\partial K}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)d\sigma.$$

Rezultă că $M_1^{(0)}$ şi M_1 sînt, respectiv, integralele curburilor medii ale suprafeţelor ∂K_0 şi ∂K. Notîndu-le cu $\overline{H}_{(0)}$ şi $\overline{H}$, formula (4.2) devine:

$$\int_{\alpha_0} \chi_{01} dK = 8\pi^2[V\chi(K_0) + V_0\chi(K)] + 2\pi(S_0\overline{H} + S\overline{H}_{(0)})$$

De aici şi din (4.1) deducem [89][14]

$$E[\chi_{01}] = \frac{V\chi(K_0) + V_0\chi(K)}{v_0} + \frac{S_0\overline{H} + S\overline{H}_{(0)}}{4\pi v_0}.$$

De asemenea, formula (2.8′) devine în acest caz [89][14]

$$E[\nu_{01}] = \frac{V_0 + V}{v_0} + \frac{S_0\overline{H} + S\overline{H}_{(0)}}{4\pi v_0}. \tag{4.3}$$

Presupunînd că intersecţia dintre corpul K şi reţeaua generată de reproducerea lui K_0 în fiecare celulă a reţelei, este formată din ν_1 sau ν_2 domenii simplu conexe şi notînd cu p_1, respectiv p_2, probabilităţile corespunzătoare, formula (4.3) se scrie:

$$\nu_1 p_1 + \nu_2 p_2 = \frac{V_0 + V}{v_0} + \frac{S_0\overline{H} + S\overline{H}_{(0)}}{4\pi v_0}$$

de unde deducem:

$$p_1 = \frac{4\pi(V_0 + V - \nu_2 v_0) + S_0\overline{H} + S\overline{H}_{(0)}}{4\pi v_0(\nu_1 - \nu_2)}$$

$$p_2 = \frac{4\pi(V_0 + V - \nu_1 v_0) + S_0\overline{H} + S\overline{H}_{(0)}}{4\pi v_0(\nu_2 - \nu_1)}$$

[14] pag. 5

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd acum că $K_0 = \alpha_0 \cup \partial\alpha_0$ şi notînd cu s_0 aria frontierei $\partial\alpha_0$ şi cu $\overline{h}_0$ integrala curburii medii a suprafeţei $\partial\alpha_0$, formula (4.3) devine:

$$E[\nu_{01}] = 1 + \frac{V}{v_0} + \frac{s_0\overline{H} + S\overline{h}_0}{4\pi v_0}$$

Avem deci [89][15]

Teorema 4.1. Orice domeniu simplu conex K de volum V şi a cărui frontieră ∂K are aria S şi integrala curburii medii $\overline{H}$ poate fi acoperit cu:

$$N \leqslant 1 + \frac{V}{v_0} + \frac{s_0\overline{H} + S\overline{h}_0}{4\pi v_0}$$

celule ale unei reţele regulate, a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0, frontiera ei avînd aria s_0 şi integrala curburii medii $\overline{h}_0$.

Să considerăm acum drept figură K_0 o curbă (Γ_0) de lungime L_0 şi drept figură K, o suprafaţă (Σ) de arie S. Atunci avem formula lui Santaló [61][16]

$$\int_{\{\Sigma \cap \Gamma_0 \neq \emptyset\}} n\,dK = 4\pi^2 S L_0$$

unde n este numărul de puncte de intersecţie dintre suprafaţa (Σ) şi curba (Γ_0).

Luînd în formula (1.4) $f(K_0 \cap K) = n$, aceasta devine

$$\int_{\alpha_0} n_{01}\,dK = 4\pi^2 S L_0$$

unde n_{01} este numărul de puncte de intersecţie dintre (Σ) şi reţeaua generată de reproducerea curbei (Γ_0) în fiecare celulă α_i.

De aici şi din (4.1) obţinem

$$E[n_{01}] = \frac{SL_0}{2v_0}. \tag{4.4}$$

Rezultă [89][17]

Teorema 4.2. Fie dată în spaţiul R_3 o reţea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0, este totdeauna posibil să găsim o poziţie a unei suprafeţe mobile (Σ) de arie S, care să aibă cel puţin $\left[\frac{SL_0}{2v_0}\right]$ puncte de intersecţie cu o curbă fixă (Γ_0) de lungime L_0.

Să presupunem că suprafaţa (Σ) poate fi intersectată de reţeaua generată prin reproducerea curbei (Γ_0) în fiecare celulă α_i în n_1 sau n_2 puncte. Notînd cu p_1 respectiv p_2 probabilităţile corespunzătoare, formula (4.4) devine:

$$n_1 p_1 + n_2 p_2 = \frac{SL_0}{2v_0}$$

[15] pag. 5
[16] pag. 5
[17] pag. 5

Scanned with OKEN Scanner

De aici deducem:

$$p_1 = \frac{SL_0 - 2n_2v_0}{2v_0(n_1 - n_2)}, \quad p_2 = \frac{2n_1v_0 - SL_0}{2v_0(n_1 - n_2)}.$$

Să luăm acum drept figură K_0 o suprafață fixă (Σ_0) de arie S_0 și drept figură K o suprafață mobilă (Σ) de arie S. Notînd cu l lungimea curbei de intersecție dintre suprafețele (Σ_0) și (Σ), avem [5][18].

$$\int_{(\Sigma_0 \cap \Sigma \neq \emptyset)} l\,dK = 4\pi^3 S_0 S$$

Luînd în (1.4) $f(K_0 \cap K) = l$ de aici deducem:

$$\int_{\alpha_0} l_{01}\,dK = 4\pi^3 S_0 S,$$

unde l_{01} este lungimea curbei de intersecție dintre suprafața (Σ) și rețeaua generată de reproducerea lui (Σ_0) în fiecare celulă α_i.

Din această formulă și din (4.1) rezultă

$$E[l_{01}] = \frac{\pi S_0 S}{2v_0}.$$

Avem deci [89][19]

Teorema 4.3. Fiind dată în spațiul R_3 o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0, este totdeauna posibil să găsim o poziție a unei suprafețe mobile (Σ) de arie S, a cărei intersecție cu o suprafață fixă (Σ_0) de arie S_0 să aibă cel puțin lungimea $\frac{\pi S_0 S}{2v_0}$.

Vom lua acum ca figură K_0 o suprafață (Σ_0) de arie S_0 și ca figură K, sistemul format din două suprafețe mobile (Σ_1) de arie S_1 și (Σ_2) de arie S_2. Notînd cu N numărul de puncte de intersecție ale celor trei suprafețe (Σ_0), (Σ_1), (Σ_2) într-o anumită poziție a sistemului $\{(\Sigma_1), (\Sigma_2)\}$, formula (2.10'') devine

$$E[N] = \frac{\pi^3 S_0 S_1 S_2}{v_0}.$$

Avem deci:

Teorema 4.4. Fie în spațiul R_3 o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0 și o suprafață fixă $(\Sigma_0) \subset \alpha_0$ de arie S_0. În acest caz putem găsi totdeauna o poziție a unui sistem de suprafețe $\{(\Sigma_1), (\Sigma_2)\}$ de arii S_1, respectiv S_2, care să aibă cu suprafața (Σ_0) cel puțin $\left[\frac{\pi^3 S_0 S_1 S_2}{v_0}\right]$ puncte de intersecție.

Să presupunem acum că figura K_0 este un corp de volum V_0 și a cărui frontieră ∂K_0 are aria S_0 și integrala curburii medii $\bar{H}_0$, și să considerăm un sistem format din m corpuri convexe egale $\{K_1, \ldots, K_m\}$ de volume V și ale căror frontiere $\partial K_{(i)}$, $(i = 1, \ldots, m)$ au ariile S și integralele curburilor medii $\bar{H}$. Să no-

[18] pag. 117
[19] pag. 5

Scanned with OKEN Scanner

tăm cu $\mathfrak{K}_{m,r}$ corpul obținut ca intersecție a numai r din cele m corpuri ale sistemului $\{K_1, \ldots, K_m\}$ cu $v_{m,r}$ volumul corpului $K_0 \cap \mathfrak{K}_{m,r}$ și cu $s_{m,r}$ aria frontierei $\partial(K_0 \cap \mathfrak{K}_{m,r})$. Atunci avem formulele [76]

$$\int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m) \neq \emptyset\}} v_{m,r} \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = \tag{4.5}$$

$$= V_0 \binom{m}{r} (8\pi^2 V)^r [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0 \overline{H} + S\overline{H}_0)]^{m-r},$$

$$\int_{\{K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m \neq \emptyset\}} s_{m,r} \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = \binom{m}{r} 8\pi^2 (8\pi^2 V)^{r-1} [8\pi^2 V_0 +$$

$$+ 2\pi(S_0 \overline{H} + S\overline{H}_0)]^{m-r-1} \{(m-r) 8\pi^2 V_0 V S + \tag{4.5'}$$

$$+ [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0 \overline{H} + S\overline{H}_0)](r V_0 S + V S_0)\}$$

Luînd în (1.6) $f[K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)] = v_{m,r}$ și ținînd seama de (4.5) obținem:

$$\int_{\alpha_0} v_{m,r}^{(01)} \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = V_0 \binom{m}{r} (8\pi^2 V)^r [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0 \overline{H} + S\overline{H}_0)]^{m-r} \tag{4.6}$$

unde am notat cu $v_{m,r}^{(01)}$ volumul părții interioare rețelei generate de reproducerea lui K_0 în toate celulele α_i a corpului $\mathfrak{K}_{m,r}$.

Pe de altă parte, ovalele $K_1, \ldots, K_m$ fiind independente, din (4.1) rezultă:

$$\int_{\alpha_0} \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = \int_{\alpha_0} \mathrm{d}K_1 \ldots \int_{\alpha_0} \mathrm{d}K_m = (8\pi^2 V_0)^m. \tag{4.1'}$$

De aici și din (4.6) obținem valoarea medie

$$E[v_{m,r}^{(01)}] = \binom{m}{r} \left(V_0 + \frac{S_0 \overline{H} + S\overline{H}_0}{4\pi} \right)^{m-r} \frac{V_0 V^r}{v_0^m}.$$

Avem deci:

Teorema 4.5. Fie în spațiul R_3 o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0. Dacă corpul convex $K_0 \subset \alpha_0$ are volumul V_0, iar frontiera ∂K_0 are aria S_0 și integrala curburii medii $\overline{H}_0$, atunci există cel puțin o poziție a unui sistem format din m corpuri convexe egale, independente între ele, de volume V și ale căror frontiere au ariile S și integralele curburilor medii $\overline{H}$, astfel încît volumul intersecției dintre K_0 și corpul obținut ca intersecție a numai r din cele m corpuri convexe, să fie cel puțin egal cu:

$$\binom{m}{r} \left(V_0 + \frac{S_0 \overline{H} + S\overline{H}_0}{4\pi} \right)^{m-r} \frac{V_0 V^r}{v_0^m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Luînd în (1.6) $f[K_0 \cap (K_1 \cap \ldots \cap K_m)] = s_{m,r}$

din (4.5') deducem

$$\int_{\alpha_0} s_{m,r}^{(01)} dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = \binom{m}{r} 8\pi^2 (8\pi^2 V)^{r-1} [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0 \bar{H} + S\bar{H}_0)]^{m-r-1}$$

unde $s_{m,r}^{(01)}$ este aria frontierei intersecției dintre corpul $\mathcal{K}_{m,r}$ și rețeaua generată prin reproducerea lui K_0 în toate celulele α_i.

De aici și din (4.1') rezultă :

$$E[s_{m,r}^{(01)}] = \binom{m}{r}\left(V_0 + \frac{S_0\bar{H} + S\bar{H}_0}{4\pi}\right)^{m-r-1} \left[(m-r)V_0 VS + \right.$$

$$\left. + \left(V_0 + \frac{S_0\bar{H} + S\bar{H}_0}{4\pi}\right)(rV_0 S + VS_0)\right] \frac{V^{r-1}}{v_0^m}.$$

Avem deci :

Teorema 4.6. Fie în spațiul R_3 o rețea regulată a cărei celulă fundamentală α_0 are volumul v_0. Dacă corpul convex $K_0 \subset \alpha_0$ are volumul V_0, iar frontiera lui ∂K_0 are aria S_0 și integrala curburii medii $\bar{H}_0$, atunci există cel puțin o poziție a unui sistem format din m corpuri convexe egale, independente între ele, de volume V și ale căror frontiere au ariile S și integralele curburilor medii $\bar{H}$, astfel încît aria intersecției dintre K_0 și corpul obținut ca intersecție a numai r din cele m corpuri convexe să fie cel puțin egală cu

$$\binom{m}{r}\left(V_0 + \frac{S_0\bar{H} + S\bar{H}_0}{4\pi}\right)^{m-r-1}\left[(m-r)V_0 VS + \left(V_0 + \frac{S_0\bar{H} + S\bar{H}_0}{4\pi}\right)(rV_0 S + VS_0)\right] \frac{V^{r-1}}{v_0^m}.$$

§3.5. PROBLEMA ACULUI A LUI BUFFON. EXTENSIUNI.

Prima problemă de probabilități geometrice a fost „problema acului" pusă de Buffon în 1777 și care cu drept cuvînt este considerat fondatorul teoriei probabilităților geometrice. Soluția riguroasă a acestei probleme a fost dată în 1860 de către E. Barbier (fără a introduce explicit noțiunea de măsură).

Enunțul problemei este următorul : Se consideră un parchet format din lame paralele avînd lățimea a ; se cere probabilitate ca un ac de lungime l ($l < a$) aruncat la întîmplare pe parchet, să cadă pe una din liniile despărțitoare ale parchetului.

Această problemă poate fi reformulată astfel : fiind dat un segment de lungime l și un sistem de drepte paralele care se găsesc la aceeași distanță a, ($a > l$) să se determine probabilitatea ca una din dreptele sistemului să intersecteze segmentul.

Vom face un studiu direct al acestei probleme. Considerăm liniile despărțitoare paralele cu axa Ox, una din ele fiind Ox și fie dreptunghiul de vîrfuri

Scanned with OKEN Scanner

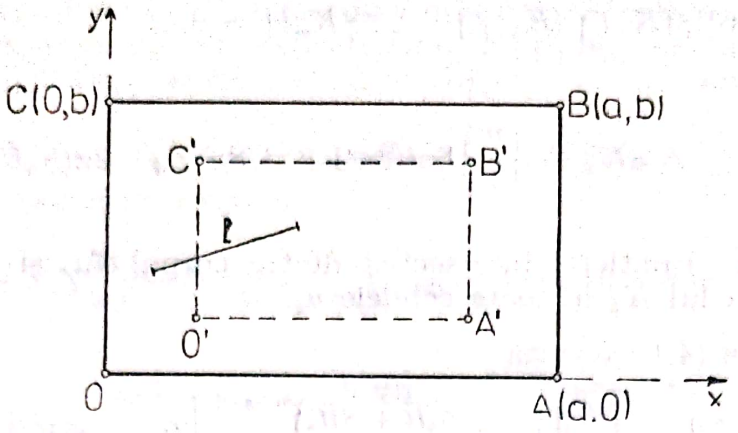

Fig. 3.3.1

O (0, 0), A (a, 0), B(a, b), C(0, b) fig. 3.3.1. Dacă notăm prin $P(b)$ probabilitatea ca un segment de lungime l care are o extremitate în interiorul dreptunghiului să intersecteze dreapta $y = b$, atunci soluţia problemei lui Buffon va fi

$$P = \lim_{b\to\infty} P(b).$$

Notînd cu $\mu(\mathfrak{M})$ măsura mulţimii segmentelor cu o extremitate în interiorul dreptunghiului OABC şi care intersectează dreapta $y = b$, şi prin $\mu(\mathfrak{M})$ măsura mulţimii segmentelor cu o extremitate în interiorul dreptunghiului OABC, avem :

(5.1) $$P(b) = \frac{\mu(\mathfrak{R})}{\mu(\mathfrak{M})}.$$

Poziţia acului este determinată de coordonatele x, y ale extremităţii şi de unghiul θ făcut cu axa Ox. Ţinînd seama de expresia măsurii cinematice din plan avem :

$$\mu(\mathfrak{M}) = \int_0^{\pi} d\theta \int_a^b dx \int_0^a dy = \pi ab,$$

$$\mu(\mathfrak{R}) = \int_0^{\pi} d\theta \int_a^b dx \int_{a-l\sin\theta}^a dy = 2lb$$

de unde

$$P(b) = \frac{2l}{\pi a}$$

şi

(5.2) $$P = \lim_{b\to\infty} P(b) = \frac{2l}{\pi a}.$$

Vom da în continuare cîteva extensiuni ale „problemei acului" în planul euclidian.

Scanned with OKEN Scanner

Buffon, şi mai tîrziu Laplace, au studiat o generalizare a acestei probleme şi anume: dată o reţea formată din dreptunghiuri de laturi a, b să se determine probabilitatea ca un segment de lungime l, $(l < a,\ l < b)$ să intersecteze reţeaua.

Fie unul din dreptunghiurile reţelei OABC (fig. 3.3.1). Probabilitatea cerută este egală cu probabilitatea ca un segment de lungime l al cărui mijloc este în interiorul dreptunghiului să intersecteze una din laturile lui. Fie q probabilitatea ca un astfel de segment să nu intersecteze laturile dreptunghiului. Atunci $P = l - q$.

Măsura mulţimii segmentelor de lungime l cu mijlocul în interiorul dreptunghiului OABC este

$$\mu(\mathfrak{M}_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a dx \int_a^b dy = \frac{\pi ab}{2}.$$

Segmentele de lungime l care fac cu Ox unghiul θ şi cu mijlocul în dreptunghiul de vîrfuri $O'\left(\frac{l\cos\theta}{2}, \frac{l\sin\theta}{2}\right)$, $A'\left(a - \frac{l\cos\theta}{2}, \frac{l\sin\theta}{2}\right)$, $B'\left(a - \frac{l\cos\theta}{2}, b - \frac{l\sin\theta}{2}\right)$ şi $C'\left(\frac{l\cos\theta}{2}, b - \frac{l\sin\theta}{2}\right)$ nu intersectează laturile dreptunghiului OABC. Măsura lor este:

$$\mu(\mathfrak{M}_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{l\cos\theta}{2}}^{a - \frac{l\cos\theta}{2}} dx \int_{\frac{l\sin\theta}{2}}^{b - \frac{l\sin\theta}{2}} dy = \frac{\pi ab}{2} + \frac{l^2}{2} - l(a+b).$$

Rezultă

$$q = \frac{\mu(\mathfrak{M}_1)}{\mu(\mathfrak{M}_1)} = 1 + \frac{l^2}{\pi ab} - \frac{2l(a+b)}{\pi ab}.$$

De unde

$$P = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}. \tag{5.4}$$

Făcînd în această relaţie $a \to \infty$ obţinem tocmai soluţia problemei lui Buffon.

Probabilitatea ca segmentul să intersecteze o latură a reţelei paralelă cu Ox este $P_a = \frac{2l}{\pi a}$ şi dacă notăm cu p_a probabilitatea de a intersecta o singură latură şi p_{ab} — probabilitatea de a intersecta două laturi consecutive a unui dreptunghi al reţelei, avem:

$$P = P_a + P_b - p_{ab} = p_a + p_b + p_{ab} \tag{5.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$P_a = \frac{2l}{\pi a} = p_a + p_{ab},\ P_b = \frac{2l}{\pi b} = p_b + p_{ab}$$

Rezultă

$$p_{ab} = \frac{l^2}{\pi ab},\ p_a = \frac{2l}{\pi a} - \frac{l^2}{\pi ab},\ p_b = \frac{2l}{\pi b} - \frac{l^2}{\pi ab}.$$

Dacă $l = a = b$ avem $p_{ab} = \frac{1}{\pi},\ p_a = \frac{2}{\pi},\ p_b = \frac{1}{\pi},\ P = \frac{3}{\pi}$.

Teorema 5.1. Dată în planul euclidian o rețea formată din dreptunghiuri de laturi a, b, probabilitatea ca un segment aleator de lungime l, $(l < a,\ l < b)$, uniform repartizat în plan să intersecteze rețeaua este

$$P = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}.$$

Să considerăm în planul euclidian o rețea formată din paralelograme de laturi $a, b (a \leqslant b)$ a căror laturi fac unghiul $\alpha \left(\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Să se determine probabilitatea ca un segment de lungime $l (l < b \sin \alpha)$ aruncat pe rețea să intersecteze rețeaua [81].

Fie unul din paralelogramele rețelei OABC cu $O(0, 0)$ $A(a, 0)$, $B(a + b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ și $C(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$.

Probabilitatea cerută este egală cu probabilitatea ca un segment de lungime l al cărui mijloc Q este în interiorul paralelogramului să intersecteze una din laturile lui.

Dacă φ $(0 < \varphi < \alpha)$ este unghiul făcut de dreapta suport pe care se află segmentul cu Ox, măsura mulțimii segmentelor de lungime l cu mijlocul în interiorul paralelogramului OABC este

$$\mu(\mathfrak{M}) = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{\{Q \in OABC\}} dP = \pi ab \sin \alpha.$$

Segmentele de lungime l care sînt interioare paralelogramului OABC și care nu intersectează laturile acestuia trebuie să aibă mijlocul în paralelogramul π' de vîrfuri $O'\left(\frac{l}{2}\cos\varphi, \frac{l}{2}\sin\varphi\right)$, $A'\left(a - \frac{l}{2}(\cos\varphi - 2\operatorname{ctg}\alpha\sin\varphi), \frac{l}{2}\sin\varphi\right)$, $B'\left(a + b\cos\alpha - \frac{l}{2}\cos\varphi,\ b\sin\alpha - \frac{l}{2}\sin\varphi\right)$, $C'\left(\frac{l}{2}(\cos\varphi - 2\operatorname{ctg}\alpha\sin\varphi) + b\cos\alpha,\ b\sin\alpha - \frac{l}{2}\sin\varphi\right)$ pentru $0 < \varphi < \alpha$ sau interior paralelogramului π'' de vîrfuri $O''\left(\frac{l}{2}(2\operatorname{ctg}\alpha\sin\varphi - \cos\varphi), \frac{l}{2}\sin\varphi\right)$, $A''\left(a + \frac{l}{2}\cos\varphi, \frac{l}{2}\sin\varphi\right)$, $B''\left(a + b\cos\alpha + \frac{l}{2}(\cos\varphi - 2\operatorname{ctg}\alpha\sin\varphi), b\sin\alpha - \frac{l}{2}\sin\varphi\right)$, $C''\left(b\cos\alpha - \frac{l}{2}\cos\varphi,\ b\sin\alpha - \frac{l}{2}\sin\varphi\right)$, dacă $\alpha < \varphi < \pi$.

Scanned with OKEN Scanner

Măsura mulțimii acestor segmente este

$$\mu(\mathfrak{M}) = \int_0^{\alpha} d\varphi \int_{\{Q \in \pi'\}} dQ + \int_{\alpha}^{\pi} d\varphi \int_{\{Q \in \pi''\}} dQ =$$

$$= \pi ab \sin \alpha - 2l(a+b) + l^2 \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{ctg} \alpha\right].$$

Rezultă

$$P = 1 - \frac{\mu(\mathfrak{M})}{\mu(\mathfrak{M})} = \frac{2l(a+b) - l^2\left[1 + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{ctg} \alpha\right]}{\pi ab \sin \alpha}. \tag{5.6}$$

Deci o extensiune a problemei lui Buffon este dată de:

Teorema 5.2. Fiind dată în planul euclidian o rețea formată din paralelograme de laturi a, b $(a \leqslant b)$ ale căror laturi fac unghiul α, probabilitatea ca un segment aleator de lungime $l (l < b \sin \alpha)$, uniform repartizat în plan, să intersecteze laturile rețelei este

$$P = \frac{2l(a+b) - l^2\left[1 + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{ctg} \alpha\right]}{\pi ab \sin \alpha}$$

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$ regăsim probabilitatea (3.4).

Să considerăm acum rețeaua formată din triunghiuri echilaterale T, de latură a. Să se determine probabilitatea ca un segment de lungime $l\left(l < \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ aruncat pe rețea să o intersecteze. Rezultatul este dat în [82] și anume:

Fie $A\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ vîrfurile unui triunghi al rețelei. Segmentul de lungime $l\left(l < \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ este interior triunghiului ABC dacă mijlocul său Q este interior triunghiului:

1° $A'\left(-\frac{l \sin \varphi}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}(a - l \cos \varphi)\right)$, $B'\left(\frac{l \sin \varphi}{\sqrt{3}} - \frac{l \cos \varphi}{2} - \frac{a}{2}, \frac{l \sin \varphi}{2}\right)$.

$C'\left(\frac{a}{2} - \frac{l \cos \varphi}{2} - \frac{l \sin \varphi}{\sqrt{3}}, \frac{l \sin \varphi}{2}\right)$, pentru $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$;

2° $A''\left(-\frac{l \cos \varphi}{2}, \frac{a\sqrt{3} - l \sin \varphi}{2}\right)$, $B''\left(\frac{l \sin \varphi}{\sqrt{3}} - \frac{l \cos \varphi}{2} - \frac{a}{2}, \frac{l \sin \varphi}{2}\right)$

$C''\left(\frac{a}{2} - \frac{l \cos \varphi}{2} - \frac{l \sin \varphi}{\sqrt{3}}, \frac{l \sin \varphi}{2}\right)$ pentru $\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{2\pi}{3}$;

3° $A'''\left(\frac{l \sin \varphi}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}(a + l \cos \varphi)\right)$, $B'''\left(\frac{l \sin \varphi}{\sqrt{3}} - \frac{l \cos \varphi}{2} - \frac{a}{2}, \frac{l \sin \varphi}{2}\right)$,

$C'''\left(\frac{a}{2} + \frac{l \cos \varphi}{2}, \frac{l \sin \varphi}{2}\right)$, pentru $\frac{2\pi}{3} < \varphi < \pi$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\mu(\mathfrak{M}) = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{\{Q \in T\}} dQ = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} a^2.$$

$$\mu(\mathfrak{M}) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\{Q \in T'\}} dQ + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \int_{\{Q \in T''\}} dQ + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} d\varphi \int_{\{Q \in T'''\}} dQ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\pi a^2 - 4\sqrt{3}al + \left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right) l^2\right]$$

de unde, probabilitatea cerută :

$$P = 1 - \frac{\mu(\mathfrak{M})}{\mu(\mathfrak{M})} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{l}{a} - \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{l}{a}\right)^2. \tag{5.7}$$

Avem deci :

Teorema 5.3. Dată în planul euclidian o rețea formată din triunghiuri echilaterale de latură a, probabilitatea ca un segment aleator, de lungime $l\left(l < \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, uniform repartizat în plan, să intersecteze laturile rețelei este

$$P = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{l}{a} - \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{l}{a}\right)^2.$$

Să considerăm în planul euclidian o rețea formată din hexagoane regulate de latură a. Tot în [82] se arată că:

Teorema 5.4. Dată în planul euclidian o rețea formată din hexagoane regulate de latură a, probabilitatea ca un segment aleator, de lungime $l(l < a\sqrt{3})$, uniform repartizat în plan, să intersecteze rețeaua este

$$P = \frac{4\sqrt{3}}{3\pi} \frac{l}{a} - \frac{3\sqrt{3} - \pi}{9\pi}\left(\frac{l}{a}\right)^2. \tag{5.8}$$

Vom da în continuare cîteva extensiuni ale ,,problemei acului'' în spațiul euclidian R_3.

Fie R_3 un spațiu euclidian cu trei dimensiuni de coordonate carteziene ortogonale x^1, x^2, x^3, și (Σ) un ovaloid de volum V și arie S și a cărui curbură medie este H.

Dacă notăm cu (E) un plan oarecare de ecuație

$$x^1 \cos\varphi \sin\theta + x^2 \sin\varphi \sin\theta + x^3 \cos\theta - p = 0$$

atunci măsura elementară a mulțimii acestor plane este [20][24] :

$$dE = |\sin\theta|\, dp \wedge d\varphi \wedge d\theta = dp \wedge d\Omega. \tag{5.9}$$

[24] pag. 92

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că măsura mulțimii planelor care intersectează un segment de lungime l este

$$\mu_1 = \pi l, \tag{5.10}$$

iar măsura mulțimii planelor care intersectează o curbă închisă convexă de lungime L este [20][25]:

$$\mu_2 = \frac{\pi}{2} L. \tag{5.10'}$$

De asemenea, notînd cu γ lungimea curbei de intersecție dintre planul (E) și frontiera $(\partial\Sigma)$ a ovaloidului și cu σ aria secțiunii determinate de (Σ) pe (E) avem [20][26]:

$$\int_{\{E \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \gamma \mathrm{d}E = \frac{\pi^2}{2} S. \tag{5.11}$$

și [19][27]

$$\int_{\{E \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \sigma \mathrm{d}E = 2\pi V. \tag{5.12}$$

În sfîrșit, $\mathrm{d}\sigma$ fiind elementul de arie pe suprafața $(\partial\Sigma)$, avem [10]

$$\int_{\{E \cap \Sigma \neq \emptyset\}} \mathrm{d}E = \overline{H}, \qquad \text{unde } \overline{H} = \int_{\partial\Sigma} H \mathrm{d}\sigma. \tag{5.13}$$

Fie acum o figură K în spațiul R_3 și $(\mathfrak{K})$ mulțimea tuturor figurilor obținute din aceasta prin transformări ortogonale. Măsura elementară $\mathrm{d}K$ a mulțimii $(\mathfrak{K})$ este măsura cinematică în spațiul R_3 și avem [5][28]: $\mathrm{d}K = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}\Omega \wedge \mathrm{d}\psi$ unde $P(x^1, x^2, x^3)$ este vectorul translației iar θ, φ, ψ sînt unghiurile lui Euler ale rotației.

Măsura elementară cinematică $\mathrm{d}K$ se poate pune de asemenea sub forma [61][29]:

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}\vec{E} \wedge \mathrm{d}K_e \tag{5.14}$$

unde $(\vec{E})$ este un plan orientat iar $\mathrm{d}K_e$ este măsura elementară cinematică în acest plan.

Să considerăm acum în spațiul R_3 o sferă de rază R și un segment de lungime l interior ei. Ținînd seama că în cazul unei sfere de rază R avem $H = \frac{1}{R}$, rezultă că $\overline{H} = 4\pi R$, deci măsura mulțimii planelor care intersectează sfera este $4\pi R$. De aici și din (5.10) rezultă că probabilitatea ca un plan aleator, uni-

---

[25] pag. 93
[26] pag. 94
[27] pag. 732
[28] pag. 60
[29] pag. 13

Scanned with OKEN Scanner

form repartizat într-un domeniu care conţine o sferă de rază R, care intersectează această sferă, să intersecteze şi un segment de lungime l interior sferei este:

(5.15) $$P = \frac{l}{4R}.$$

Această formulă ne dă o primă extensiune a problemei lui Buffon şi anume:

Teorema 5.5. Fiind dată în spaţiul euclidian R_3 o reţea formată din plane paralele, echidistante, situate la distanţa a, probabilitatea ca un ac de lungime $l (l < a)$, aruncat pe reţea să intersecteze un plan al ei este:

$$P = \frac{l}{2a}.$$

Din formula (5.10') rezultă că măsura mulţimii planelor care intersectează un cerc de rază r este $\pi^2 r$. Avînd în vedere că măsura mulţimii planelor care intersectează sfera de rază R este $4\pi R$, rezultă că:

Probabilitatea ca un plan aleator, uniform repartizat într-un domeniu care conţine o sferă de rază R, care intersectează această sferă, să intersecteze şi un cerc de rază r, $(r < R)$, situat în interiorul ei, este:

(5.16) $$P = \frac{\pi r}{4R}.$$

De aici deducem:

Teorema 5.6. Fiind dată în spaţiul euclidian R_3 o reţea formată din plane paralele, echidistante, situate la distanţa a, probabilitatea ca un cerc de rază r, $\left(r < \frac{a}{2}\right)$ aruncat pe reţea să intersecteze un plan al ei este:

(5.17) $$P = \frac{\pi r}{2a}.$$

Să considerăm acum o reţea formată din paralelipipede cu laturile a, b, c, care acoperă spaţiul R_3. Vrem să determinăm probabilitatea ca un cerc de rază r să intersecteze unul din planele reţelei.

Această probabilitate este egală cu probabilitatea ca un cerc aleator de rază r, uniform repartizat într-un domeniu care conţine unul din paralelipipedele reţelei, al cărui centru este în interiorul paralelipipedului, să intersecteze feţele acestuia.

Să notăm cu (Σ_0) un paralelipiped oarecare al reţelei. Volumul lui este $V = abc$, iar aria $S = 2(ab + bc + ca)$.

De asemenea vom nota cu K un cerc mobil de rază r.

Dacă q este probabilitatea ca cercul K al cărui centru în interiorul lui (Σ_0) să nu intersecteze feţele lui (Σ_0), atunci:

(5.18) $$P = 1 - q$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu $\mathfrak{M}$ mulțimea cercurilor K al căror centru P este în interiorul lui (Σ_0) avem:

$$\mu(\mathfrak{M}) = \int_{P\in\Sigma_0} dK = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{P\in\Sigma_0} dP = 2\pi^2 abc. \tag{5.19}$$

Să notăm cu $\mathfrak{N}$ mulțimea cercurilor K al căror centru este în interiorul lui (Σ_0) și nu intersectează fețele lui (Σ_0).
Ținînd seama de (5.14) avem:

$$\mu(\mathfrak{N}) = \int_{\{P\in\Sigma_0,\ K\cap(\partial\Sigma_0)\neq\emptyset\}} d\vec{E}\, dK_e$$

Dar

$$dK_e = d\psi \wedge dP_e$$

P_e fiind un punct în planul (E) iar ψ unghiul de rotație în jurul acestui punct, în planul (E).

Paralelipipedul (Σ_0) determină pe planul (E) un paralelogram $(\mathfrak{L})$ a cărui arie o notăm cu σ iar perimentul cu γ. Notînd cu $(\mathfrak{L}')$ paralelogramul interior lui $(\mathfrak{L})$ ale cărui laturi sînt paralele cu ale acestuia și la distanța r de ele, aria lui este:

$$\sigma' = \sigma - \frac{r}{2}(\gamma + \gamma')$$

unde γ' este perimetrul lui $(\mathfrak{L}')$.

Cu aceste notații avem:

$$\int_{\{P_e\in\Sigma_0,\ K\cap(\partial\Sigma_0)\neq\emptyset\}} dK_e = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{P_e\in\mathfrak{L}} dP_e = \frac{\pi}{2}\sigma' = \frac{\pi}{2}\left[\sigma - \frac{r}{2}(\gamma+\gamma')\right]$$

deci:

$$\mu(\mathfrak{M}) = \int_{\{P\in\Sigma_0,\ K\cap(\partial\Sigma_0)\neq\emptyset\}} d\vec{E}\wedge dK_e = 2\int_{\{E\cap\Sigma_0\neq\emptyset\}} dE \int_{\{P\in\Sigma_0,\ K\cap(\partial\Sigma_0)\neq\emptyset\}} dK_e =$$

$$= \pi \int_{\{K\cap\Sigma_0\neq\emptyset\}} \left[\sigma - \frac{r}{2}(\gamma+\gamma')\right] dE.$$

Ținînd seama aici de formulele (5.11) și (5.12), obținem:

$$\mu(\mathfrak{M}) = 2\pi^2 V - \frac{\pi^3}{4} rS - \frac{\pi^3}{4} rS'$$

unde S' este aria paralelipipedului interior lui (Σ_0) ale cărui fețe sînt paralele cu fețele lui (Σ) și situate la distanța r de acestea, adică:

$$S' = 2[(a-2r)(b-2r) + (b-2r)(c-2r) + (c-2r)(a-2r)]$$

Scanned with OKEN Scanner

şi deci:

$$\mu(\mathfrak{M}) = 2\pi^2 abc - \pi^3(ab + bc + ca)r + 2\pi^3(a + b + c)r^2 - b\pi^3 r^3$$

De aici şi din (5.19) deducem:

$$q = 1 - \frac{\pi(ab + bc + ca)r}{2abc} + \frac{\pi(a + b + c)r^2}{abc} - \frac{3\pi r^3}{abc}$$

Înlocuind această valoare în (5.18) obţinem:

$$P = \frac{\pi(ab + bc + ca)r}{2abc} - \frac{\pi(a + b + c)r^2}{abc} + \frac{3\pi r^3}{abc}$$

Avem deci [90]

Teorema 5.7. Fiind dată în spaţiul euclidian R_3 o reţea formată din paralelipipede de laturi a, b, c, probabilitatea ca un cerc de rază r, $\left(r < \frac{1}{2}\min(a, b, c)\right)$, aruncat pe reţea să intersecteze un plan al ei este:

$$P = \frac{\pi(ab + bc + ca)r}{2abc} - \frac{\pi(a + b + c)r^2}{abc} + \frac{3\pi r^3}{abc}$$

Făcînd aici $b, c \to \infty$, regăsim probabilitatea (5.17).

În cazul unei reţele formate din tetraedre regulate de latură a obţinem în mod analog:

$$P = \frac{3\sqrt{6}}{2}\pi\frac{(a^2 - 2\sqrt{6}ar + 12r^2)r}{a^3}.$$

§3.6. NOI PROBLEME PRIVIND REŢELELE ALEATOARE CU APLICABILITATE ÎN OPTIMIZAREA CERCETĂRILOR GEOLOGICE. ESTIMAŢII ŞI PREDICŢII

În acest paragraf se vor studia unele probleme teoretice ale reţelelor aleatoare, probleme ce s-au născut din necesitatea de a găsi modele de optimizare a reţelelor de cercetare şi explorare geologică. Modelele elaborate au aplicabilitate şi în cercetarea geofizică precum şi pentru prognoza volumelor de resurse minerale.

Rezultatele paragrafului 3.5 şi în special cele prezentate în teoremele 5.1—5.4 sînt de asemenea aplicabile în probleme de optimizare a cercetărilor geologice.

Am separat totuşi aceste noi probleme într-un paragraf aparte atît pentru faptul că nu toate sînt extensiuni ale problemei acului lui Buffon cît şi pentru faptul că s-au născut efectiv din necesităţi practice. Avem în vedere determinarea probabilităţilor de interceptare cu reţele de linii paralele, pătratice, dreptunghiulare sau rombice a unor corpuri care în proiecţie plană sînt reprezentate prin segmente sau cercuri de dimensiuni date.

Scanned with OKEN Scanner

Fie într-un plan un cerc de diametru D și o rețea de puncte echidistante cu „a" aruncată aleator pe plan.

Este evident necesar ca $D \leqslant a\sqrt{2}$, în caz contrar probabilitatea de interceptare este unu.

Să considerăm situația din figura 3.6.1. într-un sistem particular de coordonate.

Evident, probabilitatea interceptării suprafeței cercului cu oricare din cele patru puncte este aceeași, astfel încît vom calcula numai probabilitatea interceptării cu punctul de coordonate (0, 0).

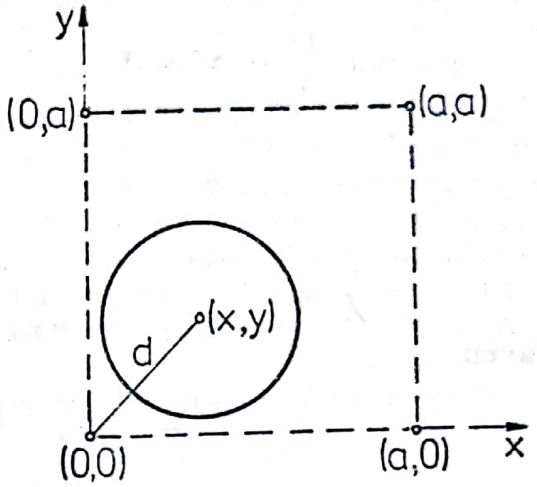

Fig. 3.6.1.

Fie d distanța de la centrul cercului (x, y) la punctul de coordonate (0, 0)

$$d^2 = x^2 + y^2$$

Pentru ca punctul de coordonate (0, 0) să cadă pe suprafața cercului trebuie să fie îndeplinită condiția

$$d \leqslant R \quad \text{sau} \quad d \leqslant \frac{D}{2}$$

Această condiție se scrie:

$$x^2 + y^2 \leqslant \frac{D^2}{4}$$

sau

$$y \leqslant \sqrt{\frac{D^2}{4} - x^2}; \quad y \geqslant 0$$

Este necesară condiția

$$\frac{D^2}{4} - x^2 \geqslant 0$$

care înseamnă

$$x \leqslant \frac{D}{2}; \quad x \geqslant 0.$$

În figura 3.6.2 se construiește graficul funcției

$$y = \sqrt{\frac{D^2}{4} - x^2}$$

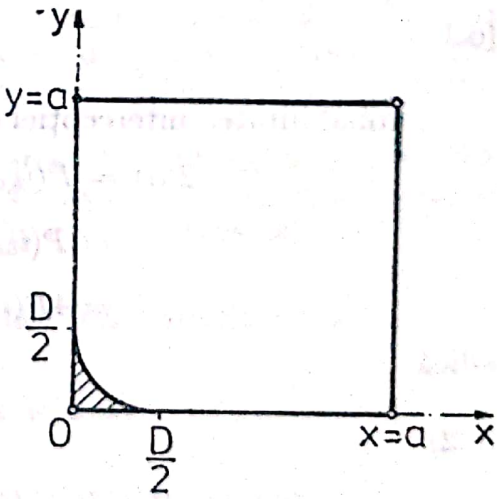

Fig. 3.6.2.

Se constată că probabilitatea intercepţiei cercului cu punctul de coordonate (0, 0) este tocmai raportul ariei haşurate (S) către aria pătratului (a^2)

$$P(i_{0,0}) = \frac{S}{a^2}$$

Dar $S = \int_0^{\frac{D}{2}} \sqrt{\frac{D^2}{4} - x^2} \cdot \mathrm{d}x$

Punînd $\frac{D^2}{4} - x^2 = t^2$

$$\mathrm{d}x = -\frac{t\mathrm{d}t}{x}$$

$$x = \sqrt{\frac{D^2}{4} - t^2}$$

avem

$$S = \int_0^{\frac{D}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{\frac{D^2}{4} - t^2}} \mathrm{d}t =$$

$$= \left[-\frac{t\sqrt{\frac{D^2}{4} - t^2}}{2} + \frac{D^2}{8} \arcsin \frac{2t}{D} \right]_0^{\frac{D}{2}} =$$

$$= \frac{D^2}{8} \arcsin 1 - \frac{D^2}{8} \arcsin 0 = \frac{D^2}{8} \cdot \frac{\pi}{2}$$

rezultă

(6.1) $$P(i_{0,0}) = \frac{\pi}{16}\left(\frac{D}{a}\right)^2$$

Probabilitatea intercepţiei cu oricare din cele patru puncte va fi

$$P(i) = P(i_{0,0} \cup i_{0,a} \cup i_{a,0} \cup i_{a,a}) =$$

$$= P(i_{0,0}) + P(i_{0,a}) + P(i_{a,0}) + P(i_{a,a}) =$$

$$= 4P(i_{0,0})$$

adică

(6.2) $$P(i) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D}{a}\right)^2$$

ceea ce trebuie demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

Consecință. Estimatorul numărului total de cercuri va fi:

$$\hat{N} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{a}{D}\right)^2 \bar{x} \tag{6.3}$$

unde $\bar{x}$ este numărul de cercuri interceptate cu rețeaua de echidistanță a.

3.6.2. REȚELE DE LINII PARALELE ÎN PLAN. CAZUL INTERSECȚIEI SEGMENTELOR DE LUNGIME DATĂ

Vom prezenta mai întîi sintetic rezultatul teoremelor din §3.5 privind probabilitatea interceptării unor segmente de lungime l cu o rețea de linii paralele de echidistanță $a(l < a)$ sau cu rețele pătratice $(a \times a)$ și dreptunghiulare $(a \times b)$.

Se vor demonstra apoi unele teoreme privind estimarea numărului total de segmente cînd acesta este necunoscut: determinarea probabilității de interceptare pentru cazul segmentelor de lungime necunoscută; determinarea probabilităților de interceptare a unor cercuri de diametru dat sau diametru necunoscut.

Probabilitățile de interceptare a unor segmente de lungime l cu rețele de linii paralele de echidistanță a, rețele pătratice $(a \times a)$ sau dreptunghiulare $(a \times b)$ sînt

$$p(i) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{l}{a} \text{ pentru rețele de linii paralele echidistante cu } a(l < a) \\ \frac{1}{\pi}\frac{l}{a}\left(4 - \frac{l}{a}\right) \text{ pentru rețele pătratice } (a \times a);\ (l < a) \\ \frac{1}{\pi}\frac{l(a+b)}{ab}\left(2 - \frac{l}{a+b}\right) \text{ pentru rețele dreptunghiulare } a \times b \\ \qquad (l < a;\ l < b). \end{cases} \tag{6.4}$$

Vom da în continuare o consecință privind problema estimării numărului total de segmente de lungime l, dacă acest număr nu se cunoaște. Această problemă are implicații practice utile în cercetările geofizice prin faptul că permite să se estimeze numărul total, posibil de filoane de lungime l dată, cunoscîndu-se rezultatul prospecțiunii geofizice efectuate pe o rețea de profile paralele echidistante cu a. Problema practică a fost tratată în lucrarea [100] și nu o vom mai prezenta aici.

Consecință. Dacă $\bar{x}$ este numărul mediu de segmente de lungime l, intersectate de o rețea așezată aleator într-un număr dat de experimente, atunci estimația numărului total de segmente (cînd acest număr este necunoscut) este

$$\hat{N} = \begin{cases} \frac{a}{l}\frac{\pi}{2}\bar{x} \text{ pentru rețele de linii paralele echidistante cu } a \\ \frac{\pi a^2}{l(4a-l)}\bar{x} \text{ pentru rețele pătratice } (a \times a) \\ \frac{\pi ab}{l(2a+2b-l)}\bar{x} \text{ pentru rețele dreptunghiulare } (a \times b) \end{cases} \tag{6.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație

Fie N segmente de lungime l, localizate aleator într-o arie pătratică.

Numărul $x(N)$ de segmente intersectate cu o rețea de linii urmează o lege de repartiție binomială cu densitatea de probabilitate

$$f_N(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!}[p(i)]^x[1-p(i)]^{N-x} \tag{6.6}$$

unde $p(i)$ sînt date anterior.

Media și dispersia variabilei aleatoare x au expresiile

$$E(x) = Np(i) \tag{6.7}$$

$$\sigma^2 = Np(i)[1-p(i)] \tag{6.8}$$

Vom efectua acum un experiment aleator ce constă în așezarea aleatoare a rețelei de linii considerate pe suprafața cu segmente de lungime l. Se notează numărul de intersecții x. Dacă se vor face mai multe experimente variind de fiecare dată localizarea și orientarea segmentelor se va obține o mulțime de numere x și deci o valoare medie a lor $\bar{x}$.

În cazurile în care N nu este cunoscut iar printr-un procedeu oarecare se poate estima $\bar{x}$ (cum este exemplul unei prospecțiuni geofizice efectuate pe o rețea dată) atunci se poate scrie aproximativ

$$\bar{x} \approx Np(i)$$

de unde estimația numărului total de segmente posibil să existe, număr c a permis intersecția în medie a $\bar{x}$ segmente cu rețeaua dată, va fi:

$$\hat{N} \approx \frac{\bar{x}}{p(i)} \tag{6.9}$$

Înlocuind $p(i)$ cunoscute pentru diferite rețele de linii paralele, se obține rezultatul enunțat în consecința 1.

Vom determina în continuare un interval de încredere pentru numărul real de segmente de lungime l dată.

Teorema 6.1. Dacă printr-un experiment aleator se determină numărul mediu de segmente de lungime l intersectate cu o rețea de linii de echidistanță dată, dintr-un număr total N necunoscut, atunci intervalul de încredere care cu o probabilitate dată acoperă valoarea reală N este:

$$(1-t)^2\frac{1-p(i)}{p(i)} \leqslant N \leqslant (1+t)^2\frac{1-p(i)}{p(i)}$$

unde $p(i)$ sînt probabilitățile de intersecție, iar t rezultă din condiția

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1-\varepsilon;\ \varepsilon > 0$$

Variabila aleatoare x ce definește numărul de segmente de lungime l intersectate cu o rețea de linii paralele, echidistante cu a, sau cu o rețea pătratică

Scanned with OKEN Scanner

$(a \times a)$ sau dreptunghiulară $(a \times b)$, urmează o lege binomială de medie $Np(i)$ și dispersie $Np(i)[1 - p(i)]$.

Se poate accepta că variabila aleatoare

$$\frac{Np(i) - \sqrt{Np(i)[1 - p(i)]}}{\sqrt{Np(i)[1 - p(i)]}} \tag{6.10}$$

urmează o repartiție normală de medie zero și dispersie unu.

Avem

$$P\left(-t \leqslant \frac{Np(i) - \sqrt{Np(i)[1 - p(i)]}}{\sqrt{Np(i)[1 - p(i)]}} \leqslant t\right) = 1 - \varepsilon$$

cu t verificînd condiția

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \varepsilon; \quad \varepsilon > 0 \text{ dat.}$$

Notînd $Q = \sqrt{p(i)[1 - p(i)]}$ se poate scrie

$$-t\sqrt{N}Q \leqslant Np(i) - \sqrt{N}Q \leqslant t\sqrt{N}Q$$

de unde

$$(1 - t)\sqrt{N}Q \leqslant Np(i)$$

$$(1 + t)\sqrt{N}Q \geqslant Np(i)$$

sau

$$\frac{N}{\sqrt{N}} \geqslant \frac{(1 - t)Q}{p(i)}$$

$$\frac{N}{\sqrt{N}} \leqslant \frac{(1 + t)Q}{p(i)}.$$

Ținînd seama de expresia lui Q se obține

$$\sqrt{N} \geqslant (1 - t)\sqrt{\frac{1 - p(i)}{p(i)}}$$

$$\sqrt{N} \leqslant (1 + t)\sqrt{\frac{1 - p(i)}{p(i)}}$$

de unde

$$N \geqslant (1 - t^2) \cdot \frac{1 - p(i)}{p(i)} \tag{6.11}$$

$$N \leqslant (1 + t)^2 \cdot \frac{1 - p(i)}{p(i)} \tag{6.12}$$

Problema segmentelor de lungime necunoscută

În teoremele precedente s-a presupus că se cunoaște lungimea segmentelor.

Să presupunem acum cazul unor segmente de lungime necunoscută dar pentru care se pot aprecia momentele de ordinul 1 și 2 ale distribuției lor.

Scanned with OKEN Scanner

În cercetările geologice și geofizice, spre exemplu, se pot aprecia din cunoașterea preliminară lungimile medii ale zonelor mineralizate posibil să existe în perimetrul cercetărilor. Aceste lungimi medii reprezintă prognoze efectuate pe baza indicilor de mineralizare. Este util să se cunoască în aceste cazuri probabilitățile de interceptare cu rețele de cercetare de anumite echidistanțe și forme în scopul aprecierii rețelelor optime. Vom demonstra următoarea teoremă:

Teorema 6.2. Dacă l este o variabilă aleatoare mărginită ($l \leqslant a$) cu probabilitatea unu, ce reprezintă lungimile unor segmente aleatoare, atunci probabilitatea intersecției $P(i)$ a unui segment cu o rețea de linii paralele de echidistanță a, sau cu o rețea pătratică ($a \times a$) sau dreptunghiulară ($a \times b$), este dată de expresia

$$(6.13)\quad P(i) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi a} E(l) \text{ pentru rețele de linii paralele echidistante cu } a \ (l < a) \\ \dfrac{1}{\pi a^2} [4aE(l) - E(l^2)] \text{ pentru rețele pătratice } (a \times a); \\ \dfrac{1}{\pi ab} [2(a+b)E(l) - E(l^2)] \text{ pentru rețele dreptunghiulare } a \times b \ (l < a, \ l < b) \end{cases}$$

unde prin $E(l)$ și $E(l^2)$ am notat momentele de ordinul 1 și 2 ale distribuției variabilei aleatoare l.

Demonstrație

Probabilitatea necondiționată a intersecției unui segment cu lungimea variabilă aleatoare, cu o rețea de linii paralele de o formă dată, este

$$(6.14)\quad P(i) = \int_0 \int_l P(i/l, \theta) p(l, \theta) \, dl \, d\theta$$

unde $P(i/l, \theta)$ este probabilitatea intersecției condiționată de lungimea segmentului l și orientarea sa θ iar $p(l, \theta)$ este densitatea de probabilitate a vectorului (l, θ).

Cum l este independent statistic de orientarea θ avem

$$p(l, \theta) = p(l) \, p(\theta)$$

cu $p(l)$ și $p(\theta)$ notăm densitățile de probabilitate ale variabilei aleatoare l și respectiv θ.

Să presupunem $p(l)$ cunoscut iar $p(\theta) = \frac{1}{\pi}$ pentru $\theta \in [0, \pi]$, θ având o distribuție uniformă în intervalul indicat.

Pentru rețele de linii paralele echidistante cu a avem

$$P(i/l, \theta) = \frac{2}{\pi} \frac{l}{a}$$

Rezultă

$$(6.15)\quad P(i) = \int_0^{\pi} \int_l \frac{2}{\pi} \frac{l}{a} \cdot \frac{1}{\pi} p(l) \, d\theta \, dl = \frac{2}{a\pi} \int_l l p(l) \, dl.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece variabila aleatoare l s-a presupus mărginită ($l \leqslant a$) cu probabilitatea 1, rezultă că valoarea medie $E(l)$ există şi este mărginită, $E(l) \leqslant a$.

Cum

$$E(l) = \int_l lp(l)\,dl$$

avem

$$P(i) = \frac{2}{a\pi} E(l) \tag{6.16}$$

obţinîndu-se astfel primul rezultat al teoremei.

În cazul reţelelor pătratice ($a \times a$) avem

$$P(i/l, \theta) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{l}{a}\left(4 - \frac{l}{a}\right)$$

şi prin urmare

$$P(i) = \int_0^{\pi} \int_l \frac{1}{\pi} \frac{l}{a} \frac{(4a - l)}{a} \cdot \frac{1}{\pi}\, d\theta p(l) dl =$$

$$= \frac{1}{\pi a^2}\left[4a \int_l lp(l)dl - \int_l l^2 p(l)dl = \frac{1}{\pi a^2}\left[4aE(l) - E(l^2)\right]\right]$$

ţinînd seama că şi în acest caz condiţia impusă asupra variabilei aleatoare l face ca momentele $E(l)$ şi $E(l^2)$ ale distribuţiei lui l să existe şi să fie mărginite, aşa încît

$$E(l) = \int_l lp(l)dl \text{ şi } E(l^2) = \int_l l^2 p(l)dl \tag{6.17}$$

Se tratează asemănător cazul reţelelor dreptunghiulare ($a \times b$).

Se pune

$$P(i/l, \theta) = \frac{1}{\pi} \frac{l(a+b)}{ab}\left(2 - \frac{l}{a+b}\right) \tag{6.18}$$

şi rezultă

$$P(i) = \frac{1}{\pi^2 ab} \int_0^{\pi} d\theta \int_l l(2a + 2b - l)p(l)dl = \tag{6.19}$$

$$= \frac{1}{\pi ab}\left[2(a+b) \int_l lp(l)dl - \int_l l^2 p(l)dl\right] = \frac{1}{\pi ab}\left[2(a+b)E(l) - E(l^2)\right].$$

Teorema este demonstrată.

Se constată din rezultatele obţinute că nu este necesar să se cunoască densitatea de probabilitate $p(l)$ a variabilei aleatoare l, ci doar o estimaţie a primelor două momente $E(l)$ şi $E(l^2)$.

Scanned with OKEN Scanner

3.6.3. REȚELE DE LINII PARALELE ÎN PLAN. CAZUL INTERSECȚIEI CU CERCURI DE DIAMETRE DATE

Se consideră un cerc în plan, de diametru D peste care se aruncă aleator o rețea de linii : paralele de echidisanță a, pătratică $(a \times a)$ sau dreptunghiulară $(a \times b)$.

Vom da mai întîi o teoremă, asemănătoare teoremei privind probabilitatea intersecției segmentului cu una din liniile rețelei.

Teorema 6.3. Probabilitatea intersecției cercului de diametru D cu o rețea de linii este

$$P(I) = \begin{cases} \frac{D}{a} \text{ pentru o rețea de linii paralele de echidistanță } a \\ \frac{D}{a}\left(2 - \frac{D}{a}\right) \text{ pentru rețele pătratice } (a \times a) \\ \frac{D}{ab}\,(a + b - D) \text{ pentru rețele dreptunghiulare } (a \times b) \end{cases}$$

Demonstrație

În cazul rețelelor de linii paralele de echidistanță a se poate observa ușor că

$$P(I) = \frac{D}{a}$$

rezultat dealtfel cunoscut.

În cazul rețelelor pătratice sau dreptunghiulare vom nota I_x și I_y intersecțiile cu o linie orizontală și respectiv verticală.

Probabilitatea intersecției unui cerc cu o astfel de rețea va fi

$$P(I) = P(I_x \cup I_y) = P(I_x) + P(I_y) - P(I_x \cap I_y) \tag{6.20}$$

cu $P(I_x \cap I_y) = \int_\theta P(I_x, I_y/\theta) p(\theta)\, d\theta$

probabilitatea intersecției concomitente cu ambele linii — orizontală și verticală.

S-a notat

$P(I_x, I_y/\theta)$ — probabilitatea intersecției cu ambele linii, condiționată de unghiul θ făcut de un diametru cu o direcție dată

$p(\theta)$ — densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare θ.

În cazul rețelelor pătratice $(a \times a)$ avem

$$P(I_x) = P(I_y) = \frac{D}{a}$$

$$P(I_x, I_y/\theta) = P(I_x)P(I_y) = \left(\frac{D}{a}\right)^2$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece intersecţia nu depinde de θ în cazul cercului şi

$$p(\theta) = \frac{1}{\pi} \text{ pentru } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

Rezultă

$$P(I_x \cap I_y) = \int_0^{\pi} \left(\frac{D}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi} \, d\theta = \left(\frac{D}{a}\right)^2$$

şi prin urmare

(6.21) $$P(I) = \frac{2D}{a} - \left(\frac{D}{a}\right)^2 = \frac{D}{a}\left(2 - \frac{D}{a}\right)$$

Pentru reţele $(a \times b)$ avem

$$P(I_x) = \frac{D}{a}; \quad P(I_y) = \frac{D}{b}; \quad P(I_x \cap I_y) = \frac{D^2}{ab}$$

Rezultă

(6.22) $$P(I) = D\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{D^2}{ab} = \frac{D}{ab}(a + b - D)$$

Consecinţă. Probabilitatea intersecţiei unui cerc de diametru D cu ambele laturi ale unei reţele de linii pătratice sau dreptunghiulare este

(6.23) $$P(I) = \begin{cases} \left(\frac{D}{a}\right)^2 \text{ pentru reţele pătratice } (a \times a) \\ \frac{D^2}{ab} \text{ pentru reţele dreptunghiulare } (a \times b) \end{cases}$$

Demonstraţia rezultă din teorema precedentă.

Problema cercurilor de diametre necunoscute

Să considerăm acum cercuri de diametre necunoscute, considerate variabile aleatoare, mărginite, cu probabilitatea unu $(D < a)$, sau pentru cazul reţelelor dreptunghiulare cu $D < \text{Min } (a, b)$.

Notăm $P(I/D)$ şi $P(D)$ probabilitatea intersecţiei condiţionată de lungimea diametrelor D şi respectiv densitatea de probabilitate a diametrelor.

Probabilitatea necondiţionată a intersecţiei unui cerc oarecare cu o reţea de linii este

$$P(I) = \int_D P(I/D)p(D)dD$$

Cum $P(I/D) = \frac{D}{a}$ pentru reţele paralele de echidistanţă a rezultă

$$P(I) = \frac{1}{a}\int_D Dp(D)dD = \frac{1}{a}E(D)$$

Pentru rețele patratice

$$P(I/D) = \frac{D}{a}\left(2 - \frac{D}{a}\right)$$

avem

$$P(I) = \frac{1}{a^2}\int_D D(2a - D)\, p(D)\mathrm{d}D = \frac{1}{a^2}\left[2a\int_D Dp(D)\mathrm{d}D - \int_D D^2 p(D)\mathrm{d}D\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[2aE(D) - E(D^2)\right]$$

Pentru rețele dreptunghiulare $(a \times b)$ avem

$$P(I/D) = \frac{D}{ab}(a + b - D)$$

și deci

$$P(I) = \frac{1}{ab}\int D(a + b - D)p(D)\mathrm{d}D = \frac{1}{ab}\left[(a + b)\int_D Dp(D)\mathrm{d}D - \int_D D^2 p(D)\mathrm{d}D\right] =$$

$$= \frac{1}{ab}\left[(a + b)\,E(D) - E(D^2)\right]$$

Deoarece D este considerat o variabilă aleatoare mărginită ($D < a$ pentru rețele de linii paralele sau pătratice de echidistanță a, sau $D < \min(a, b)$ pentru rețele dreptunghiulare $(a \times b)$ momentele de ordinul unu și doi există și sînt finite, rezultă

Teorema 6.4. Dacă diametrul cercurilor este o variabilă aleatoare mărginită cu probabilitatea 1, atunci probabilitatea intersecției unui cerc cu o rețea de linii paralele de echidistanță a, pătratică $(a \times a)$ sau dreptunghiulară $(a \times b)$, este:

$$P(I) = \begin{cases} \frac{1}{a}E(D) & \text{pentru rețele de linii paralele de echidistanță } a \\ \frac{1}{a^2}\left[2aE(D) - E(D^2)\right] & \text{pentru rețele pătratice } a \times a \\ \frac{1}{ab}\left[(a + b)E(D) - E(D^2)\right] & \text{pentru rețele dreptunghiulare } a \times b \end{cases}$$

unde $E(D)$ și $E(D^2)$ sînt momentele de ordinul unu și doi ale distribuției diametrelor.

3.6.4. REȚELE ROMBICE. CAZUL INTERSECȚIEI CU SEGMENTE DE LUNGIMI DATE

Vom prezenta rezultatele obținute pentru cazul unor rețele rombice de latură a și unghi φ între două laturi alăturate.

Se consideră unghiul φ unul din unghiurile ascuțite.

Scanned with OKEN Scanner

Fie o rețea rombică de latură a formînd un unghi φ ascuțit între două laturi alăturate (fig. 3.6.3).

Considerăm două linii x și y ale rețelei rombice și un segment $l \leqslant b = a \sin \varphi$ așezat într-o poziție aleatoare unde prin b s-a notat distanța dintre două laturi opuse.

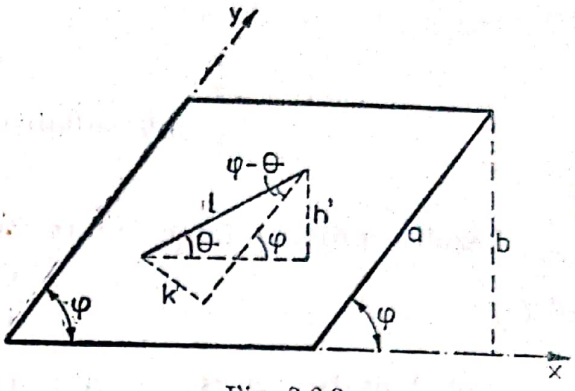

Fig. 3.6.3.

Probabilitatea intersecției segmentului de lungime l cu o rețea rombică de latură a va depinde de unghiul φ.

Vom calcula mai întîi probabilitățile intersecției segmentului de lungime l cu liniile, orizontală x și verticală y.

Avem $P(I_x) = P(I_y) = \dfrac{2l}{\pi b}$

Cum $b = a \sin \varphi$ rezultă

$$P(I_x) = P(I_y) = \frac{2l}{\pi a \sin \varphi}\,;\ 0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Probabilitatea intersecției cu ambele linii, condiționată de unghiul θ făcut de direcția segmentului cu orizontala va fi:

$$P(I_x,\ I_y/\theta) = \frac{h'}{b} \times \frac{k'}{b},\ \text{unde}$$

$$h' = l \sin \theta$$

$$k' = l \sin (\varphi - \theta)$$

Prin urmare:

(6.24) $$P(I_x,\ I_y/\theta) = \frac{l^2 \sin \theta \sin (\varphi - \theta)}{a^2 \sin^2 \varphi}$$

Probabilitatea intersecției necondiționate va fi

$$P(I_x \cap I_y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(I_x,\ I_y/\ \theta) p(\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{l^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sin (\varphi - \theta) d\theta$$

Înlocuim

$$\sin \theta \sin (\varphi - \theta) = \sin \theta [\sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta]$$

$$P(I_x \cap I_y) = \frac{2}{\pi} \frac{l^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[\sin \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta\, d\theta - \cos \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta\, d\theta \right]$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,;\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Rezultă probabilitatea intersecției duble

$$P(I_x \cap I_y) = \frac{1}{\pi}\,\frac{l^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}\left[\sin\varphi - \frac{\pi}{2}\cos\varphi\right] \tag{6.25}$$

Probabilitatea intersecției cu una din laturile rețelei va fi

$$P(I, \varphi) = P(I_x \cup I_y) = P(I_x) + P(I_y) - P(I_x \cap I_y)$$

sau

$$P(I, \varphi) = \frac{4l}{\pi a \sin\varphi} - \frac{1}{\pi}\,\frac{l^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}\left[\sin\varphi - \frac{\pi}{2}\cos\varphi\right] =$$

$$= \frac{l^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}\left[\frac{4a}{\pi l} + \frac{1}{2}\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{1}{\pi}\right]$$

sau

$$P(I, \varphi) = \frac{1}{\pi}\,\frac{l}{a}\left(4 - \frac{l}{a}\right)\frac{1}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{l^2}{a^2}\,\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$$

Rezultă :

Teorema 6.5. Probabilitatea intersecției unui segment de lungime l cu o rețea rombică de linii paralele, de latură a și formînd un unghi φ ascuțit între două laturi alăturate este :

$$P(I, \varphi) = \frac{1}{\pi}\,\frac{l}{a}\left(4 - \frac{l}{a}\right)\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi} + \frac{l^2}{2a^2}\,\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$$

în condițiile $l \leqslant a\sin\varphi$ și $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$

Observație. Punînd condiția $\varphi = \frac{\pi}{2}$ se obține

$$P\left(I, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{l}{a}\left(4 - \frac{l}{a}\right);\quad l \leqslant a \tag{6.26}$$

adică rezultatul cunoscut pentru cazul rețelelor pătratice.

Observație. În funcție de $P\left(I, \frac{\pi}{2}\right)$ probabilitatea $P(I, \varphi)$ se scrie

$$P(I, \varphi) = \frac{1}{\sin^2\varphi}\,P\left(I, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{l^2}{a^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} \tag{6.27}$$

Consecință. Probabilitatea $P(I, \varphi)$ este o funcție descrescătoare în raport cu $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație

Se calculează derivata în raport cu φ

$$\frac{dP(I,\varphi)}{d\varphi} = \frac{l}{2\pi a^2 \sin^4\varphi}\left[-\pi l(1+2\cos^2\varphi) - 4(4a-l)\sin\varphi\cos\varphi\right]$$

Cum $4a - l > 0$ rezultă că

$$\frac{dP(I,\varphi)}{d\varphi} < 0$$

și prin urmare $P(I, \varphi)$ este descrescătoare în raport cu φ.

Pentru $\varphi = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$ se obțin următoarele expresii:

$$P\left(I,\frac{\pi}{6}\right) = 4P\left(I,\frac{\pi}{2}\right) + 2\sqrt{3}\,\frac{l^2}{a^2}; \quad l \leqslant \frac{a}{2}$$

$$P\left(I,\frac{\pi}{4}\right) = 2P\left(I,\frac{\pi}{2}\right) + \frac{l^2}{a^2}; \quad l \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$P\left(I,\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{3}P\left(I,\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{9}\,\frac{l^2}{a^2}; \quad l \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Observație. Probabilitățile de intersecție a segmentelor de lungime l cu rețele rombice de unghi φ cresc cu scăderea unghiului φ corelat însă cu condiții mai restrictive pentru raportul dintre lungimea segmentelor și latura rețelei, ceea ce devine un impediment în problemele practice.

Din condiția $l \leqslant a \sin\varphi$ se observă că marginea superioară a lungimii segmentelor l variază odată cu variația lui $\sin\varphi$ cu $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

În tabelul următor se prezintă valorile aproximative ale lui $\sin\varphi$ în scopul de a indica o valoare acceptabilă pentru aplicațiile în domenii practice (explorări).

φ	15°	18°	30°	45°	60°	72°	75°	90°
$\sin\varphi$	0,2588	0,3090	0,5000	0,7071	0,8660	0,9511	0,9659	1

În funcție de lungimea maximă așteptată a zonelor mineralizate (l_{max}) se poate alege o limită minimă a lungimii laturii rețelei așa fel încît să verifice

$$l_{max} \leqslant a_{min} \sin\varphi$$

Apoi printr-un criteriu de eficiență economică se determină $a_{optim} \geqslant a_{min}$

3.6.5. REȚELE ROMBICE. CAZUL INTERSECȚIEI CU CERCURI DE DIAMETRE DATE

Se demonstrează următoarea teoremă:

Teorema 6.6. Probabilitatea intersecției unui cerc de diametru D cu o rețea rombică de latură a și unghiul ascuțit φ între două laturi alăturate este

$$P(I,\varphi) = \frac{2D}{a\sin\varphi} - \frac{D^2}{a^2\sin^2\varphi}$$

Scanned with OKEN Scanner

în condițiile $D \leqslant a \sin \varphi$

$$0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Demonstrație

Se va raționa analog teoremei 6.5 cu observația că intersecția cu două laturi ale rombului care formează un unghi φ între ele nu depinde de orientarea unui diametru anume D al cercului, adică nu depinde de unghiul θ.

În acest caz

$$P(I_x) = P(I_y) = \frac{D}{b} = \frac{D}{a \sin \varphi}; \; 0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$P(I_x, I_y/\theta) = P(I_x) \cdot P(I_y) = \frac{D^2}{a^2 \sin^2 \varphi}$$

$$P(I_x \cap I_y) = \int_0 P(I_x, I_y/\theta) p(\theta) d\theta = \frac{D^2}{\pi a^2 \sin^2 \varphi} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{D^2}{a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Probabilitatea intersecției cercului de diametru $D \leqslant a \sin \varphi$ cu o rețea rombică de latură a și unghi φ va fi dată de relația

$$P(I, \varphi) = \frac{2D}{a \sin \varphi} - \frac{D^2}{a^2 \sin^2 \varphi} \tag{6.28}$$

Observație. Această probabilitate se poate exprima și în raport cu probabilitatea intersecției cercurilor cu rețele pătratice $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

Rezultă:

$$P(I, \varphi) = \frac{1}{\sin \varphi} P\left(I, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{D^2}{a^2} \frac{\sin \varphi - 1}{\sin^2 \varphi} \tag{6.29}$$

§3.7. METODA NUMERELOR ALEATOARE PENTRU ESTIMAREA CARACTERISTICILOR NUMERICE ALE REȚELELOR ALEATOARE

Dacă (ξ, ζ) sînt coordonatele centrului unui segment de lungime l așezat în pătratul unitate cu unul din vîrfuri în punctul (x_0, y_0) din planul (X, Y) iar θ este unghiul dintre direcția segmentului și axa absciselor și dacă pe plan se aruncă aleator o rețea de linii paralele de echidistanță a, ecuația generală a dreptelor rețelei fiind

$$Y = v + Ka \text{ cu } K = 0, 1, 2, \ldots m; \; v = \text{ct}$$

atunci condiția de intersecție a segmentului cu una din liniile rețelei este

$$|Y_0 + \zeta - (v + Ka)| \leqslant \frac{l}{2} \sin \theta$$

cu condiția $l \leqslant a$.

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că fiecare segment este binedefinit dacă se cunosc coordonatele centrului său şi unghiul θ pe care direcţia segmentului îl face cu orizontala.

Prin urmare pentru a produce segmente aleatoare de lungime l, aşezate în aria pătratică, va trebui să producem perechi de numere aleatoare (ξ, ζ) fiecare uniform repartizate pe $[0, 1]$. Fără a restrînge generalitatea am considerat pătratul unitate cu unul din vîrfuri în punctul (x_0, y_0) dat într-un sistem de coordonate. Celelalte vîrfuri ale pătratului vor avea coordonatele $(x_0 + 1 ; y_0)$ $(x_0 ; y_0 + 1)$ şi $(x_0 + 1 ; y_0 + 1)$. Perechile de numere aleatoare vor defini puncte $P(x_0 + \xi, y_0 + \zeta)$ care pot fi considerate ca mijloace ale segmentelor de lungimi l (fig. 3.7.1). Se va produce un număr N de astfel de puncte aleatoare.

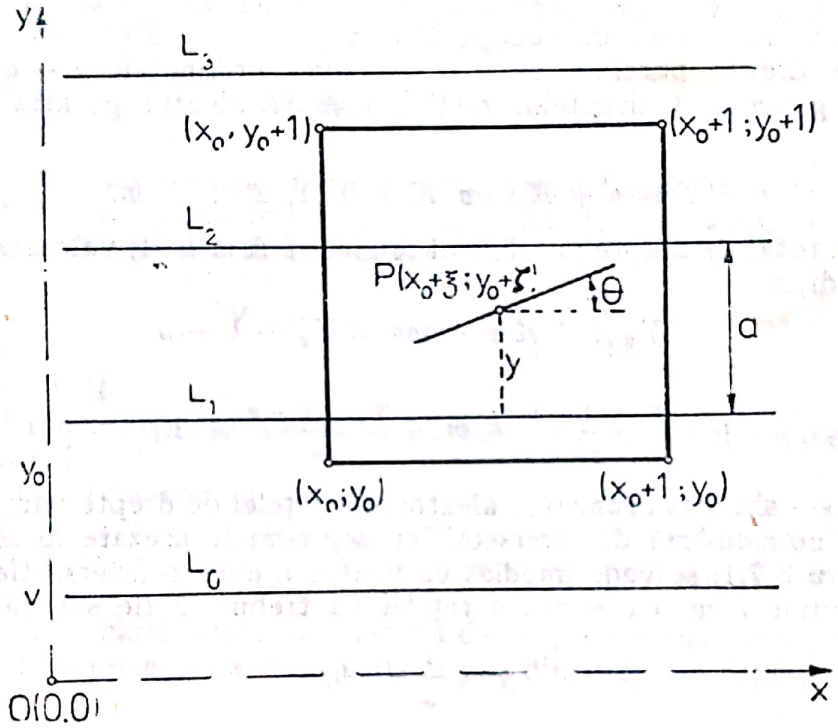

Fig. 3.7.1.

Pentru a defini poziţia segmentelor va trebui să se producă valori aleatoare pentru unghiurile θ cuprinse în intervalul $[0, \pi]$.

Fiecărei perechi de numere aleatoare (ξ, ζ) i se ataşează deci unghiul de orientare θ.

Cele trei numere aleatoare (ξ, ζ, θ) definesc un segment de lungime l dată.

Urmează să se simuleze apoi aruncarea aleatoare a unei reţele de linii paralele echidistante cu „a".

Cum segmentele au fost aşezate aleator în aria pătratică vom putea considera liniile reţelei paralele cu axa absciselor (latura orizontală a pătratului unitate).

Acest lucru nu va denatura caracterul aleator al aruncării reţelei.

Cum echidistanţa liniilor reţelei este „a" va fi suficient să se simuleze aruncarea primei linii (linia L_0).

Ecuaţia liniei L_0 va fi $y = v = \text{ct}$, fiind paralelă cu axa Ox.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece este necesar ca L_0 să se afle în afara pătratului, dar nu la o distanţă mai mare cu „a" de latura sa inferioară va trebui să fie satisfăcută condiţia

$$Y_0 - a \leqslant v \leqslant Y_0 \quad \text{cu} \quad Y_0 > a$$

condiţie impusă de necesitatea de a lucra cu numere pozitive.

Prin împărţire la Y_0 avem

$$1 - \frac{a}{Y_0} \leqslant \frac{v}{Y_0} \leqslant 1$$

Prin urmare se va produce un număr aleator subunitar „u" uniform repartizat pe intervalul $\left[1 - \frac{a}{Y_0}\,;\ 1\right]$ din care va rezulta numărul aleator $v = uY_0$ care va defini dreapta L_0 de ecuaţie $Y = v$.

Celelalte drepte paralele cu L_0 vor avea ordonatele $v + a$; $v + 2a$ ...

Ecuaţia generală a dreptelor reţelei, aşezată aleator pe aria pătratică, va fi

$$Y = v + Ka \quad \text{cu} \quad K = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Numărul total de drepte paralele al reţelei va fi $m + 1$, valoarea lui m rezultînd din condiţia

$$Y_0 + 1 \leqslant v + ma \leqslant Y_0 + 1 + a$$

sau

$$\frac{Y_0 + 1 - v}{a} \leqslant m \leqslant \frac{Y_0 + 1 - v}{a} + 1$$

După ce s-a simulat aruncarea aleatoare a reţelei de drepte paralele va trebui să se determine numărul de intersecţii cu segmentele aşezate în aria pătratică.

Din figura 3.7.1. se vede imediat că pentru a avea o intersecţie a unui segment de lungime l cu o dreaptă a reţelei va trebui să fie satisfăcută condiţia

$$y \leqslant \frac{l}{a} \sin \theta$$

unde y reprezintă distanţa de la punctul $P(x_0 + \xi\,;\ y_0 + \zeta)$ la una din dreptele reţelei $Y = v + Ka$.

Cum dreptele reţelei sînt paralele axei Ox distanţa y va fi dată de relaţia

$$y = \begin{cases} Y_0 + \zeta - (v + Ka) \text{ pentru } K < \dfrac{Y_0 + \zeta - v}{a} \\ -(Y_0 + \zeta) + (v + Ka) \text{ pentru } K > \dfrac{Y_0 + \zeta - v}{a} \end{cases}$$

sau

$$y = |Y_0 + \zeta - (v + Ka)|$$

Condiţia de intersecţie se scrie acum

$$|Y_0 + \zeta - (v + Ka)| \leqslant \frac{l}{2} \sin \theta \text{ pentru}$$

o valoare $K = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Scanned with OKEN Scanner

În această condiție Y_0; v, a și l sînt constante date.

Teorema este demonstrată.

Pe baza acestui rezultat se poate realiza un program pentru determinarea automată, cu ajutorul calculatorului, a probabilității de intersecție.

Variind coordonatele punctelor P și valorile lui K se va nota cu „1" ori de cîte ori condiția de intersecție este satisfăcută și cu „0" în caz contrar. Va rezulta numărul n de intersecții.

Probabilitatea ca din N segmente să avem n intersectate va fi estimată de frecvența relativă n/N.

De asemenea se poate compara numărul mediu de intersecții $M(x) = \frac{2}{\pi} \frac{Nl}{a}$ cu n și va rezulta un procedeu de estimare a numărului total de segmente cînd acesta nu se cunoaște.

$$\hat{N} = \frac{a}{l} \cdot \frac{\pi}{2} n$$

Vom da acum un rezultat pentru cazul cercurilor de rază D.

În condițiile problemei precedente, condiția de intersecție a cercurilor de diametre $D \leqslant a$ cu una din liniile rețelei este

$$|Y_0 + \zeta - (v + Ka)| \leqslant \frac{D}{2}$$

pentru $K = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Pentru demonstrație să presupunem acum că în locul segmentelor avem cercuri de rază D.

Ca și în cazul precedent se vor produce puncte aleatoare de coordonate $(x_0 + \xi, y_0 + \zeta)$ cu (ξ, ζ) numere aleatoare uniform repartizate pe intervalul $[0, 1]$, puncte ce vor desemna centrul cercurilor de rază D așezate aleator într-o arie pătratică.

Simularea aruncării aleatoare a rețelei de drepte paralele se face asemănător.

Condiția de intersecție a unui cerc cu una din dreptele rețelei va fi în acest caz

$$y \leqslant \frac{D}{2}$$

unde y este distanța de la centrul cercului la una din drepte.

Această condiție se mai scrie

$$|Y_0 + \zeta - (v + Ka)| \leqslant \frac{D}{2}$$

pentru $K = 0, 1, 2, \ldots, m$.

La fel se determină numărul n de intersecții.

În acest caz se pot măsura și lungimile coardelor rezultate și se va calcula lungimea lor medie $\bar{l}$ care se va compara în limitele unei erori acceptabile cu valoarea medie $M(l) = \frac{\pi}{4} D \approx \bar{l}$.

Observație. Dacă cercurile au diametre diferite, diametre ce se înscriu într-o distribuție statistică cunoscută, atunci ori de cîte ori se va produce un punct

Scanned with OKEN Scanner

aleator $P(x_0 + \xi\,;\, y_0 + \zeta)$ se va alege şi o valoare aleatoare din distribuţia statistică a diametrelor.

Prin urmare fiecărui punct: $P(x_0 + \xi\,;\, y_0 + \zeta)$ îi va corespunde un cerc de diametru $D(\xi,\ \zeta)$.

Condiţia de intersecţie va fi

$$|Y_0 + \zeta - (v + Ka)| \leqslant \frac{D(\xi,\ \zeta)}{2}$$

pentru $K = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m$.

Pentru fiecare intersecţie se măsoară lungimea coardelor rezultate şi se va calcula lungimea lor medie $\overline{l}$ care se compară cu valoarea medie $M(l)$.

Se poate estima şi numărul total de cercuri (cînd acesta nu se cunoaşte).

$$\hat{N} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{D_i}\, n(D_i)$$

unde prin D_i s-au notat valorile distincte ale diametrelor, iar prin $n(D_i)$ numărul de intersecţii ale dreptelor cu cercuri de diametre D_i.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 4

FORMULE INTEGRALE ÎN PLANUL EUCLIDIAN

§4.1. FORMULE INTEGRALE RELATIV LA FIGURI CONVEXE

4.1.1. FORMULE INTEGRALE RELATIV LA FIGURI CONVEXE DIN PLANUL EUCLIDIAN

Fie R_2 planul euclidian de coordonate carteziene ortogonale x, y; măsura cinematică elementară în acest spațiu este

$$dK = dP \wedge d\psi$$

unde $dP = dx \wedge dy$, ψ este un unghi de rotație, deci

$$dK = dG \wedge dt$$

dacă (G) este dreapta dusă prin punctul $P(x, y)$, iar t este distanța de la proiecția originii O pe dreapta (G) la P.

Dacă K_0 este o figură convexă fixă, de arie S_0 și a cărei frontieră ∂K_0 are lungimea L_0, iar K este o figură convexă aleatoare[1] de arie S și a cărei frontieră ∂K are lungimea L, atunci există următoarele măsuri [66]:

$$\mu(K \cap K_0 \neq \emptyset,\ P \in K) = \int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset, P \in K\}} dK = 2\pi S \tag{1.1}$$

$$\mu(K \cap K_0 \neq \emptyset) = \int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK = 2\pi(S_0 + S) + L_0 L \tag{1.1'}$$

unde P este un punct fix din K_0.

Relația precedentă, spre exemplu, reprezintă măsura tuturor pozițiilor figurii convexe K, care intersectează figura convexă fixă K_0.

Toate integralele considerate în cele ce urmează, sînt integrale Lebesgue.

Considerăm un sistem de m figuri convexe aleatoare, ca poziție, $(K_1, K_2, \ldots, K_m)$, independente [45], dintre care m_i egale între ele, avînd lungimea frontierei $L_i (i = 1, 2, \ldots, s)$ și aria S_i [24].

Vom stabili formule integrale, corespunzătoare configurației geometrice $K_0 \cap K^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$, unde $K^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ rezultă din intersecția a r din cele m figuri

[1] Poziția figurii este aleatoare, poziției în spațiul parametrilor i se atașează o măsură și anume măsura cinematică.

$K_1, K_2, \ldots, K_m$, dintre care r_i de arie S_i, iar $r_i \leqslant m_i$, *numerele* r_i *fiind precizate* $(i = 1, 2, \ldots, s)$. S-a notat:

$$\sum_{i=1}^{s} r_i = r\,;\quad \sum_{i=1}^{s} m_i = m$$

a) Dacă $\sigma^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ este aria configurației geometrice $K_0 \cap K^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$, să calculăm:

$$(1.2)\quad I = \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, K_2 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \sigma^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\, \mathrm{d}K_1 \wedge \mathrm{d}K_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m$$

Pentru aceasta considerăm integrala:

$$J = \int_{\left\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset, P \in K_0 \cap K^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right\}} \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m =$$

$$= \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \mathrm{d}K_1 \wedge \mathrm{d}K_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m \int_{\left\{P \in K_0 \cap K^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right\}} \mathrm{d}P =$$

$$= \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \sigma^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\, \mathrm{d}K_1 \wedge \mathrm{d}K_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = I$$

Pe de altă parte, dacă avem în vedere schimbarea ordinii de integrare, putem scrie [26]:

$$J = \int_{P \in K_0} \mathrm{d}P \int_{Q} \mathrm{d}K_1 \wedge \mathrm{d}K_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m$$

unde Q reprezintă mulțimea de sisteme $\{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$, pentru care r dintre cele m figuri convexe conțin punctul P, dintre care r_1 de arie S_1, r_2 de arie S_2, r_s de arie S_s și $m_i - r_i$ intersectează figura K_0, dar nu conțin punctul P; $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Ținînd seama de relațiile (1.1) și (1.1'), avem:

$$\int_{\{K_j \cap K_0 \neq \emptyset, P \in K_j\}} \mathrm{d}K_j = 2\pi S_j$$

$$\int_{\{K_j \cap K_0 \neq \emptyset, P \notin K_j\}} \mathrm{d}K_j = 2\pi S_0 + L_0 L_j$$

Astfel:

$$J = S_0 \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} (2\pi S_i)^{r_i} (2\pi S_0 + L_0 L_i)^{m_i - r_i}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci:

$$(1.3)\qquad \int_{(K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset)} \sigma^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}\,dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m =$$

$$= S_0\prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}(2\pi S_i)^{r_i}\,(2\pi S_0+L_0L_i)^{(m_i-r_i)}$$

Cum prin ipoteză cele m figuri convexe sînt independente, din (1.1') urmează:

$$(1.4)\qquad \int_{(K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset)} dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m=\prod_{i=1}^{s}[2\pi(S_0+S_i)+L_0L_i]^{m_i}$$

Din (1.3) și (1.4) rezultă valoarea medie:

$$(1.5)\qquad E\left(\sigma^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}\right)=\prod_{i=1}^{s}\frac{\binom{m_i}{r_i}(2\pi S_i)^{r_i}(2\pi S_0+L_0L_i)^{m_i-r_i}}{[2\pi(S_0+S_i)+L_0L_i]^{m_i}}S_0$$

Dacă notăm cu p probabilitatea ca un punct P din K_0 să aparțină figuri $K_0\cap K^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}$ avem:

$$p=\frac{\displaystyle\int_{\left\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset;\ P\in K_0\cap K^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}\right\}} dP\wedge dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m}{\displaystyle\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset,\ P\in K_0\}} dP\wedge dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m}$$

și dacă ținem seama de (1.3) și (1.4)

$$(1.6)\qquad p=\prod_{i=1}^{s}\frac{\binom{m_i}{r_i}(2\pi S_i)^{r_i}(2\pi S_0+L_0L_i)^{m_i-r_i}}{[2\pi(S_0+S_i)+L_0L_i]^{m_i}}.$$

Avem deci

Teorema 1.1. *Dacă K_0 este o figură convexă fixă, de arie S_0 și a cărei frontieră K_0 are lungimea L_0, iar $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sînt m figuri convexe aleatoare, independente, dintre care m_i $(i=1,2,\ldots,s)$ sînt egale între ele avînd aria S_i și frontiera ∂K_i de lungime L_i, cu $\sum_{i=1}^{s}m_i=m$, atunci probabilitatea ca un punct P interior lui K_0 să aparțină figurii $K_0\cap K^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}$ va fi dată de relația* (1.6).

Dacă $m_1=m_2=\ldots=m_s=m$ și $r_1=r_2=\ldots=r_s=r$; $(s=1)$, se obțin respectiv formulele:

$$(1.5')\qquad E(\sigma^r_m)=\frac{\binom{m}{r}(2\pi S)^r(2\pi S_0+L_0L)^{m-r}}{[2\pi(S_0+S)+L_0L]^m}\cdot S_0$$

$$(1.6')\qquad p=\frac{\binom{m}{r}(2\pi S)^r(2\pi S_0+L_0L)^{m-r}}{[2\pi(S_0+S)+L_0L]^m}$$

date de L.A. Santaló în lucrarea [64].

Scanned with OKEN Scanner

b) Se pune problema ca în aceleaşi condiţii ca mai sus, să obţinem valoarea integralei :

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} L^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s} \, dK_1 \wedge dK_2 \wedge \ldots \wedge dK_m$$

unde am notat cu $L^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ lungimea frontierei $K_0 \cap K^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}$.

Considerăm figura K_h, pentru h fix şi anume vom presupune că aceasta este una dintre figurile de arie S_i, cu lungimea frontierei ∂K_i, L_i, având m_i asemenea figuri ($i = 1, 2, \ldots, s$), cu $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = m$.

Vom nota cu $ds^{(1)}_h$ elementul de arc de pe frontiera $\partial K_h \cap \partial\left(K_0 \cap K^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}\right)$ ce conţine partea respectivă din $K_0 \cap K^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}$ în interiorul lui K_h şi cu $ds^{(2)}_h$ elementul de arie de pe aceeaşi frontieră $\partial K_h \cap \partial\left(K_0 \cap K^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}\right)$ ce conţine partea respectivă din $K_0 \cap K^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}$ către exteriorul lui K_h.

Vom avea de calculat :

$$J^h_1 = \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} ds^{(1)}_h \wedge dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m$$

$$J^h_2 = \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} ds^{(2)}_h \wedge dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m$$

Pentru calculul integralei J^h_1 fixăm figura K_h, iar pe frontiera sa, pe $ds^{(1)}_h$. Elementul $ds^{(1)}_h$ aparţine la $r - 1$ figuri (*distincte de* K_h), din cele $m - 1$ şi nu aparţine la celelalte $m - r$ rămase.

Dacă figura K_h face parte din cele m_i de arie S_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) atunci :

$$J^h_1 = \binom{m_1}{r_1}(2\pi S_1)^{r_1}(2\pi S_0 + L_0 L_1)^{m_1 - r_1}$$

$$\binom{m_2}{r_2}(2\pi S_2)^{r_2}(2\pi S_0 + L_0 L_2)^{m_2 - r_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{m_i - 1}{r_i - 1}(2\pi S_i)^{r_i - 1}(2\pi S_0 + L_0 L_i)^{m_i - r_i}$$

$$\binom{m_{i+1}}{r_{i+1}}(2\pi S_{i+1})^{r_i + 1}(2\pi S_0 + L_0 L_{i+1})^{m_{i+1} - r_{i+1}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{m_s}{r_s}(2\pi S_s)^{r_s}(2\pi S_0 + L_0 L_s)^{m_s - r_s} \int_{\{K_i \cap K_0 \neq \emptyset\}} ds^{(1)}_i \wedge dK_i$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece elementul de arc $ds_h^{(1)}$ aparţine la r_1 figuri din cele m_1 de arie S_1; r_2 din cele m_2 de arie S_2; $r_i - 1$ figuri din cele $m_i - 1$ de arie S_i; r_{i+1} din cele m_{i+1} de arie S_{i+1}; r_s din cele m_s de arie S_s.
Evident, avem:

$$J_1^h = \frac{r_h}{m_h}(2\pi S_h)^{-1}\prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}(2\pi S_i)^{r_i}(2\pi S_0 + L_0L_i)^{m_i-r_i}\int_{\{K_h \cap K_0 \neq \emptyset\}} ds_h^{(1)} \wedge dK_h$$

Dacă se notează cu L_{0h} lungimea frontierei din K_h, interioară lui K_0 avem atunci:

$$\int_{\{K_h \cap K_0 \neq \emptyset\}} ds_h^{(1)} \wedge_2^2 dK_h = \int_{\{K_h \cap K_0 \neq \emptyset\}} L_{0h}dK_h,$$

dar, ţinînd seama de o relaţie a lui Santaló [66]:

$$\int_{\{K_h \cap K_0 \neq \emptyset\}} ds_h^{(1)} \wedge_2^2 dK_h = 2\pi S_0 L_h \tag{1.7}$$

urmează:

$$J_1^h = \frac{r_h}{m_h}(2\pi S_h)^{-1}\prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}(2\pi S_i)^{r_i}(2\pi S_0 + L_0L_i)^{m_i-r_i} \tag{1.8}$$

Avînd aceeaşi figură fixată K_h, iar pe frontiera sa K_h elementul $ds_h^{(2)}$, urmează că r din cele $m - 1$ figuri îl conţin, iar restul de $m - 1 - r$ nu-l conţin.
Elementul de arc $ds_h^{(2)}$ aparţine la r_1 figuri din cele m_1 de arie S_1, r_2 din cele m_2 de arie S_2, r_i figuri din cele $m_i - 1$ de arie S_i, r_s din cele m_s de arie S_s. Avem:

$$J_2^i = \binom{m_1}{r_1}(2\pi S_1)^{r_1}(2\pi S_0 + L_0L_1)^{m_1-r_1}\binom{m_2}{r_2}(2\pi S_2)^{r_2}(2\pi S_0 + L_0L_2)^{m_2-r_2}\ldots$$

$$\ldots\binom{m_i - 1}{r_i}(2\pi S_i)^{r_i}(2\pi S_0 + L_0L_i)^{m_i-r_i-1}\ldots$$

$$\ldots\binom{m_s}{r_s}(2\pi S_s)^{r_s}(2\pi S_0 + L_0L_s)^{m_s-r_s}\int_{\{K_i \cap K_0 \neq \emptyset\}} ds_i^{(2)} \wedge dK_i$$

Se obţine astfel pentru J_2^h expresia:

$$J_2^h = \frac{m_h - r_h}{m_h}(2\pi S_0 + L_0L_h)^{-1}\prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}(2\pi S_i)^{r_i}(2\pi S_0 + L_0L_i)^{m_i-r_i}$$

$$\int_{\{K_0 \cap K_h \neq \emptyset\}} ds_h^{(2)} \wedge dK_h$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă ţinem seama de relaţia (1.7) rezultă:

$$(1.9)\quad J_2^h = \frac{m_h - r_h}{m_h}(2\pi S_0 L_h)(2\pi S_0 + L_0 L_h)^{-1}\prod_{t=1}^{s}\binom{m_t}{r_t}(2\pi S_t)^{r_t}(2\pi S_0 + L_0 L_t)^{m_t - r_t},$$

Notînd cu ds_0 elementul de arc situat pe frontiera $\partial K_0 \cap \partial\left(K_0 \cap K_{m_1 \dots m_s}^{r_1 \dots r_s}\right)$, urmează să calculăm integrala:

$$J_3^0 = \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \dots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} ds_0 \wedge dK_1 \wedge dK_2 \wedge \dots \wedge dK_m$$

unde ds_0 odată fixat, avem:

$$J_3^0 = \prod_{t=1}^{s}\binom{m_t}{r_t}(2\pi S_t)^{r_t}(2\pi S_0 + L_0 L_t)^{m_t - r_t}\int_{\partial K_0} ds_0$$

adică:

$$(1.10)\quad J_3^0 = \prod_{t=1}^{s}\binom{m_t}{r_t}(2\pi S_t)^{r_t}(2\pi S_0 + L_0 L_t)^{m_t - r_t} L_0.$$

Ţinînd seamă de integralele (1.8), (1.9), unde se observă că *integralele au aceeaşi valoare pentru orice figură convexă egală cu K_h din cele m_i date* ($i = 1, 2, \dots, s$). Astfel:

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \dots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} L_{m_1 m_2 \dots m_s}^{r_1 r_2 \dots r_s} dK_1 \wedge dK_2 \wedge \dots \wedge dK_m =$$

$$= J_3^0 + \sum_{h=1}^{s} m_h (J_1^h + J_2^h)$$

adică, avem relaţia:

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \dots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} L_{m_1 m_2 \dots m_s}^{r_1 r_2 \dots r_s} dK_1 \wedge dK_2 \wedge \dots \wedge dK_m =$$

$$(1.11)\quad = \prod_{t=1}^{s}\binom{m_t}{r_t}(2\pi S_t)^{r_t}(2\pi S_0 + L_0 L_t)^{m_t - r_t} \cdot \Big[L_0 +$$

$$+ \sum_{h=1}^{s} r_h (2\pi S_h)^{-1}(2\pi S_0 L_h) + (m_h - r_h)(2\pi S_0 + L_0 L_h)^{-1} \cdot 2\pi S_0 L_h\Big]$$

Din relaţiile (1.4) şi (1.11) se obţine valoarea medie a lungimii $L_{m_1 m_2 \dots m_s}^{r_1 r_2 \dots r_s}$,

$$(1.12)\quad E\left[L_{m_1 m_2 \dots m_s}^{r_1 r_2 \dots r_s}\right] = \prod_{t=1}^{s} \frac{\binom{m_t}{r_t}(2\pi S_t)^{r_t}(2\pi S_0 + L_0 L_t)^{m_t - r_t}}{[2\pi(S_0 + S_t) + L_0 L_t]^{m_t}} \cdot$$

$$\cdot \Big[L_0 + \sum_{h=1}^{s} r_h (2\pi S_h)^{-1}(2\pi S_0 L_h) + (m_h - r_h)(2\pi S_0 + L_0 L_h)^{-1} \cdot 2\pi S_0 L_h\Big]$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $m_1 = m_2 = \ldots = m_s = m$ şi $r_1 = r_2 = \ldots = r_s = r$, rezultă formulele date de L. A. Santaló [64]:

$$(1.11') \qquad \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} L_m^r \, dK_1 \wedge dK_2 \wedge \ldots \wedge dK_m =$$

$$= \binom{m}{r} (2\pi S)^r (2\pi S_0 + L_0 L)^{m-r} [L_0 + r(2\pi S)^{-1}(2\pi S_0 L) +$$

$$+ (m - r)(2\pi S_0 + L_0 L)^{-1} \cdot 2\pi S_0 L]$$

$$(1.12') \qquad E(L_m^r) = \frac{\binom{m}{r} (2\pi S)^r (2\pi S_0 + L_0 L)^{m-r} [L_0 + r(2\pi S)^{-1}(2\pi S_0 L) + (m-r) \cdot (2\pi S_0 + L_0 L)^{-1} \cdot 2\pi S_0 L]}{[2\pi(S_0 + S) + L_0 L)]^m}$$

c) Presupunem

$$(1.13) \qquad m_i S_i = k_i \quad (k_i \text{ constante}, \ i = 1, 2, \ldots, s)$$

şi vrem să calculăm:

$$\lim_{\substack{m_1 \to \infty \\ m_2 \to \infty \\ \overline{\quad\quad} \\ m_s \to \infty}} E\left(\sigma_{m_1 m_2 \ldots m_s}^{r_1 r_2 \ldots r_s}\right)$$

În (1.5) înlocuim S_i date de (1.13) şi ţinem seamă că, dacă $m_i \to \infty$ trebuie ca $S_i \to 0$, iar dacă presupunem că figurile $K_1, K_2, \ldots, K_m$ devin segmente de lungime $\frac{L_i}{2}$ avem:

$$(1.14) \qquad \lim_{\substack{m_1 \to \infty \\ \overline{\quad\quad} \\ m_s \to \infty}} E\left(\sigma_{m_1 \ldots m_s}^{r_1 \ldots r_s}\right) = S_0 \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{r_i!} \left(\frac{2\pi k_i}{2\pi S_0 + L_0 L_i}\right)^{r_i} \exp\left(-\sum_{i=1}^{s} \frac{2\pi k_i}{2\pi S_0 + L_0 L_i}\right)$$

Dacă facem ipoteza că odată cu $m_i \to \infty$, $S_i \to 0$ şi $L_i \to 0$, atunci

$$(1.15) \qquad \lim_{\substack{m_1 \to \infty \\ m_2 \to \infty \\ \overline{\quad\quad} \\ m_s \to \infty}} E\left(\sigma_{m_1 \ldots m_s}^{r_1 \ldots r_s}\right) = S_0 \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{r_i!} \left(\frac{k_i}{S_0}\right)^{r_i} \exp\left(-\frac{k}{S_0}\right)$$

unde $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$.

Din rezultatele date de Santaló, în acest caz expresia (1.15) are o valoare maximă în raport cu $r_1, r_2, \ldots, r_s$, atunci cînd r_i ia ca valoare cel mai mare întreg conţinut în $\frac{k_i}{S_0}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

d) Fie $N_{m_1 m_2 \ldots m_s}^{r_1 r_2 \ldots r_s}$ numărul de domenii simplu conexe din care este format domeniul $K_0 \cap K_{m_1 \ldots m_s}^{r_1 \ldots r_s}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ne propunem să calculăm:

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} N^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s} \, dK_1 \wedge dK_2 \wedge \ldots \wedge dK_m \tag{1.16}$$

Considerăm o figură convexă, K_h dintre cele m_i de arie S_i, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, de frontieră ∂K_i şi notăm cu φ_h *suma* unghiurilor formate de tangentele la K_h, în punctele extreme ale acelor arce, cu care frontiera ∂K_h contribuie la frontiera $\partial(K_0 \cap K^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s})$. Dacă se procedează similar ca în cazul relaţiilor (1.8), (1.9) avem:

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \varphi_h dK_1 \ldots dK_m = \prod_{t=1}^{s} \binom{m_t}{r_t} (2\pi S_t)^{r_t} (2\pi S_0 +$$

$$+ L_0 L_t)^{m_t - r_t} 4\pi^2 S_0 \cdot \left\{ \frac{m_h - r_h}{m_h} (2\pi S_0 + L_0 L_h)^{-1} + \frac{r_h}{m_h} (2\pi S_h)^{-1} \right\} \tag{1.17}$$

Notînd cu φ_0 suma unghiurilor tangentelor la K_0, în punctele extreme ale arcelor cu care frontiera ∂K_0 contribuie la frontiera $\partial\left(K_0 \cap K^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}\right)$, la fel ca în relaţia (1.10) avem:

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \varphi_0 dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m = 2\pi \prod_{t=1}^{s} \binom{m_t}{r_t} (2\pi S_t)^{r_t} (2\pi S_0 + L_0 L_t)^{m_t - r_t} \tag{1.18}$$

Avînd o curbă fixă K^* de lungime L^* şi o curbă aleatoare K (în raport cu măsura cinematică), de lungime L, dacă notăm cu ω unghiul dintre cele două curbe în unul din punctele de intersecţie, iar cu ds respectiv cu $d\sigma$ elementele de arce, de pe aceste curbe, avem [79]:

$$dK = |\sin \omega| \, ds \wedge d\sigma \wedge d\omega$$

de unde

$$|\omega| dK = |\omega \sin \omega| \, ds \wedge d\sigma \wedge d\omega$$

deci

$$\int_{\{K \cap K^* \neq \emptyset\}} (\Sigma\omega) dK = 2\pi L L^* \tag{1.19}$$

unde $\Sigma\omega$ reprezintă suma unghiurilor dintre curbele K şi K^*.

Fie figurile convexe K_h şi K_l, dintre cele m_i de arie S_i şi presupunem că frontierele lor mărginesc figura $K_0 \cap K^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}$ către interiorul lor. Notînd cu P_α unul din punctele lor de intersecţie interior lui K_0, urmează că din celelalte $m - 2$ figuri K_i, $r - 2$ trebuie să conţină punctul P_α iar celelalte $m - r$ să nu-l conţină.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu ω_{hl}^{α} unghiul dintre K_h și K_l în punctul P_α, avem:

$$\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} \sum_{\alpha}\omega_{hl}^{\alpha}\,dK_1\ldots dK_m=\binom{m_1}{r_1}(2\pi S_1)^{r_1}(2\pi S_0+L_0L_1)^{m_1-r_1}\times$$

$$\times\binom{m_2}{r_2}(2\pi S_2)^{r_2}(2\pi S_0+L_0L_2)^{m_2-r_2}\ldots\binom{m_i-2}{r_i-2}(2\pi S_i)^{r_i-2}(2\pi S_0+L_0L_i)^{m_i-r_i}\ldots$$

$$\ldots\binom{m_s}{r_s}(2\pi S_s)^{r_s}(2\pi S_0+L_0L_s)^{m_s-r_s}\int_{\{K_h^i\cap K_0\neq\emptyset,\,K_l^i\cap K_0\neq\emptyset\}}\sum_{\alpha}\omega_{hl}^{\alpha}dK_h^i\wedge dK_l^i$$

Ținînd seamă de relațiile (1.7) și (1.19), se obține:

$$\int_{\{K_h^i\cap K_0\neq\emptyset,K_l^i\cap K_0\neq\emptyset\}}\sum_{\alpha}\omega_{hl}^{\alpha}dK_h^i\wedge dK_l^i=4\pi^2S_0L_i^2 \tag{1.20}$$

Deci

$$\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}}\sum_{\alpha}\omega_{hl}^{\alpha}dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m=\prod_{t=1}^{s}\binom{m_t}{r_t}(2\pi S_t)^{r_t}(2\pi S_0+L_0L_t)^{m_t-r_t}\times$$

$$\times\frac{r_i(r_i-1)}{m_i(m_i-1)}(2\pi S_i)^{-2}4\pi^2S_0L_i^2 \tag{1.21}$$

Dacă presupunem că figura K_h face parte din cele m_i de arie S_i iar figura K_l din cele m_j de arie $S_j(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$ și mărginesc partea respectivă din $K_0\cap K_{m_1\ldots m_s}^{r_1\ldots r_s}$, *tot către interiorul lor*, atunci

$$\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}}\sum_{\alpha}\omega_{hl}^{\alpha}dK_1\wedge dK_2\wedge\ldots\wedge dK_m=$$

$$=\binom{m_1}{r_1}(2\pi S_1)^{r_1}(2\pi S_0+L_0L_1)^{m_1-r_1}\cdot\binom{m_2}{r_2}(2\pi S_2)^{r_2}(2\pi S_0+L_0L_2)^{m_2-r_2}\ldots$$

$$\ldots\binom{m_i-1}{r_i-1}(2\pi S_i)^{r_i-1}(2\pi S_0+L_0L_i)^{m_i-r_i}\ldots$$

$$\ldots\binom{m_j-1}{r_j-1}(2\pi S_j)^{r_j-1}(2\pi S_0+L_0L_j)^{m_j-r_j}\ldots\binom{m_s}{r_s}(2\pi S_s)^{r_s}(2\pi S_0+L_0L_s)^{m_s-r_s}\times$$

$$\times\int_{\{K_h^i\cap K_0\neq\emptyset,K_l^j\cap K_0\neq\emptyset\}}\sum_{\alpha}\omega_{hl}^{\alpha}dK_h^i\wedge dK_l^j$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel :

$$\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}}\sum_{\alpha}\omega_{kl}^{\alpha}dK_1\wedge dK_2\wedge\ldots\wedge dK_m=\frac{r_ir_j}{m_im_j}(2\pi S_i)^{-1}(2\pi S_j)^{-1}\cdot$$

(1.22)

$$\cdot\,4\pi^2S_0L_iL_j\prod_{t=1}^{s}\binom{m_t}{r_t}(2\pi S_t)^{r_t}(2\pi S_0+L_0L_t)^{m_t-r_t}$$

Dacă presupunem acum că figurile K_k şi K_l contribuie la $K_0\cap K_{m_1\ldots m_s}^{r_1\ldots r_s}$, K_k limitînd partea corespunzătoare a acestei arii către *interiorul* său, iar K_l către *exteriorul* său, sau viceversa, dînd pentru K_i orientarea care lasă interiorul său către stînga şi aceeaşi pentru figura $K_0\cap K_{m_1\ldots m_s}^{r_1\ldots r_s}$, urmează că unghiul dintre cele două curbe într-unul din punctele lor de intersecţie, interior lui K_0 este $\pi-\omega_{kl}^{\alpha}$. Notînd cu P_α un astfel de punct, rezultă că $r-1$ figuri din cele $m-2$ rămase, trebuie să conţină punctul P_α, iar celelalte $(m-2)-(r-1)=m-r-1$ să nu-l conţină.

Dacă presupunem că figurile K_k şi K_l fac parte dintre cele m_i figuri de arie S_i, atunci :

$$\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}}\sum_{\alpha}(\pi-\omega_{kl}^{\alpha})dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m=\binom{m_1}{r_1}(2\pi S_1)^{r_1}(2\pi S_0+$$

$$+L_0L_1)^{m_1-r_1}\cdot\binom{m_2}{r_2}(2\pi S_2)^{r_2}(2\pi S_0+L_0L_2)^{m_2-r_2}\ldots\binom{m_i-2}{r_i-1}(2\pi S_i)^{r_i-1}(2\pi S_0+$$

(1.23)

$$+L_0L_i)^{m_i-r_i-1}\ldots\binom{m_s}{r_s}(2\pi S_s)^{r_s}(2\pi S_0+L_0L_s)^{m_s-r_s}\int_{\{K_k\cap K_0\neq\emptyset,K_l\cap K_0\neq\emptyset\}}\sum_{\alpha}(\pi-$$

$$-\omega_{kl}^{\alpha})dK_k^i\wedge dK_l^i$$

Notînd cu η numărul de puncte de intersecţie dintre figurile convexe K_k şi K_l rezultă :

$$\int_{\{K_k\cap K_0\neq\emptyset,\,K_l\cap K_0\neq\emptyset\}}\sum_{\alpha}(\pi-\omega_{kl}^{\alpha})dK_k\wedge dK_l=\pi\int_{\{K_k\cap K_0\neq\emptyset,\,K_l\cap K_0\neq\emptyset\}}\eta dK_k\wedge dK_l-$$

(1.24)

$$-\int_{\{K_k\cap K_0\neq\emptyset,\,K_l\cap K_0\neq\emptyset\}}\sum_{\alpha}\omega_{kl}^{\alpha}dK_k\wedge dK_l$$

Dar ţinînd seama de formula lui Poincaré [66] :

$$\int_{\{K^*\cap K\neq\emptyset\}}n\,dK=4LL^*\tag{1.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde n este numărul punctelor de intersecție dintre curbele K și K^*, avem [79]:

$$\int_{\{K_h \cap K_0 \neq \emptyset,\, K_l \cap K_0 \neq \emptyset\}} \eta \mathrm{d}K_h \wedge \mathrm{d}K_l = 4L_i \int_{\{K_0 \cap K_h \neq \emptyset\}} l_h \mathrm{d}K_h = 4L_i(2\pi S_0 L_i) = 8\pi S_0 L_i^2$$

Dacă ținem seamă de relația precedentă și de (1.20), atunci (1.24) devine:

$$\int_{\{K_h \cap K_0 \neq \emptyset,\, K_l \cap K_0 \neq \emptyset\}} \sum_{\alpha} (\pi - \omega_{hl}^{\alpha}) \mathrm{d}K_h \wedge \mathrm{d}K_l = 4\pi^2 S_0 L_i^2 \tag{1.26}$$

Înlocuind acest rezultat în (1.23) avem:

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \sum_{\alpha} (\pi - \omega_{hl}^{\alpha}) \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = \frac{r_i(m_i - r_i)}{m_i(m-1)} (2\pi S_i)^{-1} \cdot (2\pi S_0 +$$

$$+ L_0 L_i)^{-1} 4\pi^2 S_0 L_i^2 \prod_{t=1}^{s} \binom{m_t}{r_t} (2\pi S_t)^{r_t} (2\pi S_0 + L_0 L_t)^{m_t - r_t} \tag{1.27}$$

Dacă presupunem că figura K_h face parte dintre cele m_i de lungime L_i și K_l dintre cele m_j de lungime L_j, atunci avem:

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \sum_{\alpha} (\pi - \omega_{hl}^{\alpha}) \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = \frac{r_i}{m_i} (2\pi S_i)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{m_j - r_j}{m_j} \cdot (2\pi S_0 + L_0 L_j)^{-1} 4\pi^2 S_0 L_i L_j \prod_{t=1}^{s} \binom{m_t}{r_t} (2\pi S_t)^{r_t} (2\pi S_0 + L_0 L_t)^{m_t - r_t} \tag{1.28}$$

Presupunînd că figurile K_h și K_l contribuie la frontiera configurației $K_0 \cap \bigcap K_{m_1 \ldots m_s}^{r_1 \ldots r_s}$, limitînd-o către partea *exterioară* lor, urmează că r figuri din cele $m-2$ rămase conțin punctul de intersecție P_α, iar celelalte $m-2-r$ nu-l conțin. Aci, ca și în cazurile precedente, distingem două situații după cum figurile convexe sînt egale sau diferite.

Dacă K_h, K_l sînt egale, presupunem că fac parte din cele m_i de arie S_i și avem:

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \sum_{\alpha} \omega_{hl}^{\alpha} \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = \frac{(m_i - r_i)(m_i - r_i - 1)}{m_i(m_i - 1)} (2\pi S_0 + L_0 L_i)^{-2} \cdot$$

$$\cdot 4\pi^2 S_0 L_i^2 \prod_{t=1}^{s} \binom{m_t}{r_t} (2\pi S_t)^{r_t} (2\pi S_0 + L_0 L_t)^{m_t - r_t} \tag{1.29}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tot în acest caz, dacă figurile K_h, K_l sînt diferite, adică K_h face parte din cele m_i figuri convexe de arie S_i, iar K_l din cele m_j de arie S_j, atunci avem:

$$(1.30)\qquad \int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} \sum_{\alpha}\omega_{hl}^{\alpha}\,dK_1\wedge dK_2\wedge\ldots\wedge dK_m =$$

$$= \frac{m_i-r_i}{m_i}\cdot\frac{m_j-r_j}{m_j}(2\pi S_0+L_0L_i)^{-1}\times$$

$$\times(2\pi S_0+L_0L_j)^{-1}4\pi^2S_0L_iL_j\prod_{t=1}^{s}\binom{m_t}{r_t}(2\pi S_t)^{r_t}(2\pi S_0+L_0L_t)^{m_t-r_t}$$

În sfîrşit, dacă notăm cu P_β unul din punctele de intersecţie dintre K_0 şi K_h şi dacă presupunem că partea corespunzătoare din $K_0\cap K_{m_1\ldots m_s}^{r_1\ldots r_s}$, este în interiorul lui K_h, atunci dacă ω_{0h}^{β} este unghiul dintre curbele K_0 şi K_h în punctul P_β, vom avea:

$$(1.31)\qquad \int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} \sum_{\beta}\omega_{0h}^{\beta}\,dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m =$$

$$= \frac{r_i}{m_i}(2\pi S_i)^{-1}(2\pi L_0L_i)\prod_{t=1}^{s}\binom{m_t}{r_t}\cdot(2\pi S_t)^{r_t}(2\pi S_0+L_0L_t)^{m_t-r_t}\cdot$$

Dacă partea corespunzătoare din $K_0\cap K_{m_1\ldots m_s}^{r_1\ldots r_s}$, este în exteriorul lui K_h, unghiul dintre K_0 şi K_h este $\pi-\omega_{0h}^{\beta}$ şi avem:

$$(1.32)\qquad \int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} \sum_{\beta}(\pi-\omega_{0h}^{\beta})\,dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m =$$

$$= \frac{m_i-r_i}{m_i}2\pi L_0L_i\cdot(2\pi S_0+L_0L_i)^{-1}\prod_{t=1}^{s}\binom{m_t}{r_t}(2\pi S_t)^{r_t}(2\pi S_0+L_0L_t)^{m_t-r_t}\cdot$$

Se ştie că curbura totală a unei curbe închise este unghiul pe care-l descrie tangenta la acesta, cînd parcurge întreaga curbă.

Dacă curba este compusă dintr-un număr finit de arce cu tangenta continuă, curbura totală se compune din *suma* unghiurilor pe care le formează tangentele în extremităţile fiecărui arc, la care se adaugă unghiurile exterioare formate de către cele două tangente în fiecare vîrf.

În cazul cînd curba este topologic echivalentă unei circumferinţe (nu are puncte duble şi este formată dintr-un singur contur), curbura totală este $C=2\pi$. Dacă curba se compune din N contururi exterioare între ele, curbura totală a acesteia este $C=2\pi N$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci dacă aflăm integrala curburii totale a conturului ariei $K_0 \cap K^{r_1 r_2 \cdots s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ vom obține integrala numărului de contururi sau numărului de bucăți din care se compune această arie.

Pentru a obține integrala curburii totale a conturului configurației geometrice $K_0 \cap K^{r_1 r_2 \cdots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$, trebuie adunate integralele de mai sus, ținînd seamă de următoarele:

Integrala (1.17) trebuie înmulțită cu m_h, deoarece K_h respectiv poate fi oricare din cei m_h dați, iar integrala (1.18) se ia o singură dată deoarece se referă numai la conturul K_0.

Integralele (1.21), (1.29) trebuie înmulțite cu $\binom{m_i}{2}$, deoarece K_h, K_i pot să fie oricare din cei m_i dați, iar integrala (1.27) trebuie înmulțită cu $2\binom{m_i}{2}$, deoarece în fiecare poziție a lui K_h, K_l, fiecare punct de intersecție este vîrful a două figuri.

Integralele (1.31), (1.32) trebuie înmulțite cu m_i, deoarece K_h poate fi oricare din cei m_i dați și în sfîrșit, integralele (1.22), (1.28), (1.30), trebuie înmulțite cu produsul $m_i\, m_j$.

Toate aceste integrale se însumează apoi în raport cu i, j pentru $i, j = 1, 2, \ldots, s$ cu deosebirea că în integralele (1.22), (1.28), (1.30), însumarea se face pentru $i \neq j$. Dacă se împarte cu 2π și se notează:

$$A_i = 2\pi S_0 + L_0 L_i \tag{1.33}$$

avem următorul rezultat:

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} N^{r_1 r_2 \cdots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\, \mathrm{d}K_1 \wedge \mathrm{d}K_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = \tag{1.34}$$

$$= \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} (2\pi S_i)^{r_i} A_i^{m_i - r_i} \Bigg\{ \Bigg\{ 1 + \sum_{i=1}^{s} \Bigg\{ [(m_i - r_i) A_i^{-1} + r_i (2\pi S_i)^{-1}] 2\pi S_0 +$$

$$+ \frac{1}{2} r_i (r_i - 1)(2\pi S_i)^{-2} 2\pi S_0 L_i^2 + \frac{1}{2} (m_i - r_i)(m_i - r_i - 1) A_i^{-2} 2\pi S_0 L_i^2 +$$

$$+ r_i (m_i - r_i)(2\pi S_i)^{-1} 2\pi S_0 L_i^2 A_i^{-1} + r_i L_0 L_i (2\pi S_i)^{-1} + L_0 L_i (m_i - r_i) A_i^{-1} \Bigg\} +$$

$$+ \sum_{i \neq j} r_i r_j (2\pi S_i)^{-1} \pi S_0 L_i L_j + r_i (m_j - r_j)(2\pi S_i)^{-1} A_j^{-1} 2\pi S_0 L_i L_j +$$

$$+ (m_i - r_i)(m_j - r_j) A_i^{-1} A_j^{-1} (\pi S_0 L_i L_j) \Bigg\} \Bigg\}$$

Valoarea medie $E\left(N^{r_1 r_2 \cdots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right)$ se obține împărțind expresia dată de (1.34) cu aceea dată de (1.4).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $m_1 = m_2 = \ldots = m_s = m$ şi $r_1 = r_2 = \ldots = r_s = r (s = 1)$, se obţine valoarea medie $E(N_m^r)$ dată de Santaló [64]:

$$E(N_m^r) = \frac{\binom{m}{r}(2\pi S)^r A^{m-r}}{(2\pi S_0 + 2\pi S + L_0 L)^m}\Big\{1 + [(m-r)A^{-1} + r(2\pi S)^{-1}]2\pi S_0 +$$

$$(1.34') \quad + \frac{1}{2} r(r-1)(2\pi S)^{-2} 2\pi S_0 L^2 + \frac{1}{2}(m-r)(m-r-1)A^{-2}(2\pi S_0)L^2 +$$

$$+ r(m-r)(2\pi S)^{-1} \cdot 2\pi S_0 L^2 A^{-1} + r(2\pi S)^{-1} L_0 L + (m-r)A^{-1} L_0 L\Big\}$$

unde s-a notat cu

$$(1.33') \qquad A = 2\pi S_0 + L_0 L$$

e) *Cazul benzilor cu laturile paralele.* Formulele stabilite anterior sînt valabile pentru figuri convexe şi capătă o nouă formă, dacă aceste figuri degenerează în benzi cu laturile paralele.

Oricare din aceste benzi este determinată ca poziţie, de axa sa de simetrie, iar aceste axe au măsura elementară

$$(1.35) \qquad dG = dp \wedge d\theta$$

Trecerea de la cazul studiat anterior la cel al benzilor se face presupunînd figurile convexe K_i nişte dreptunghiuri de lăţime Δ_i, făcînd lungimea bazelor să tindă către infinit.

Poziţia dreptunghiului K_i fiind determinată de centrul său de simetrie $M_i(x_i, y_i)$, dacă notăm cu t_i distanţa de la acest centru, la piciorul perpendicularei dusă din origine pe axa de simetrie atunci

$$1.36) \qquad dK_i = dx_i \wedge dy_i \wedge d\varphi_i = dp_i \wedge d\theta_i \wedge d\varphi_i = dG_i \wedge dt_i$$

În relaţiile stabilite pentru figuri convexe, dacă pentru fiecare poziţie a lui G_i integrăm în raport cu t_i corespunzător valorilor în care dreptunghiul intersectează figura convexă K_0, atunci vor apărea lungimile a_i ale dreptunghiurilor.

Dacă împărţim cu a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ în ambii membrii ai egalităţilor respective şi facem apoi $a_i \to \infty$, se obţin formulele integrale corespunzătoare benzilor [64].

În membrul drept al egalităţilor respective, după împărţirea cu a_i şi făcînd apoi $a_i \to \infty$, $S_i = a_i \Delta_i$ devine Δ_i iar $L_i = 2a_i + 2\Delta_i$ devine 2.

Deoarece s-a integrat în raport cu t_i, în membrul stîng al relaţiilor anterioare dK_i se înlocuieşte cu dG_i, iar dacă considerăm că benzile nu sînt orientate, atunci pentru fiecare dK_i, rezultatele respective trebuie împărţite cu 2.

Deci considerînd că avem m benzi cu laturile paralele, dintre care m_i au lăţimea Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ şi păstrînd notaţiile anterioare, avem:

$$(1.37) \qquad \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \sigma_{m_1 m_2 \ldots m_s}^{r_1 r_2 \ldots r_s} dG_1 \wedge dG_2 \wedge \ldots \wedge dG_m =$$

$$= S_0 \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} (\pi \Delta_i)^{r_i} L_0^{m_i - r_i}$$

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} L^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s} \, dG_1 \wedge dG_2 \wedge \ldots \wedge dG_m =$$

(1.38)

$$= \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} (\pi\Delta_i)^{r_i} L_0^{m_i - r_i} \cdot \left[L_0 + \sum_{h=1}^{s} r_h (\pi\Delta_h)^{-1} \cdot 2\pi S_0 + (m_h - r_h) L_0^{-1} \cdot 2\pi S_0 \right]$$

(1.39)
$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} N^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s} \, dG_1 \wedge dG_2 \wedge \ldots \wedge dG_m =$$

$$= \prod_{t=1}^{s} \binom{m_t}{m_r} (\pi\Delta_t)^{r_t} L_0^{m_t - r_t} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{s} [r_i(r_i - 1)(\pi\Delta_i)^{-2} \pi S_0 + (m_i - r_i)(m_i - r_i - \right.$$

$$- 1) L_0^{-2} \pi S_0 + 2\pi S_0 L_0^{-1} r_i (m_i - r_i)(\pi\Delta_i)^{-1} + L_0 r_i (\pi\Delta_i)^{-1} + (m_i - r_i)] +$$

$$+ \sum_{i \neq j} [(r_i r_j)(\pi\Delta_i)^{-1}(\pi\Delta_j)^{-1} \pi S_0 + r_i (m_j - r_j)(\pi\Delta_i)^{-1} L_0^{-1} \cdot 2\pi S_0 +$$

$$\left. + (m_i - r_i)(m_j - r_j) L_0^{-2} \pi S_0] \right\}$$

(1.40)
$$E\left(\sigma^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right) = \prod_{i=1}^{s} \frac{\binom{m_i}{r_i} (\pi\Delta_i)^{r_i} L_0^{m_i - r_i}}{(\pi\Delta_i + L_0)^{m_i}} S_0$$

(1.41)
$$p = \prod_{i=1}^{s} \frac{\binom{m_i}{r_i} (\pi\Delta_i)^{r_i} L_0^{m_i - r_i}}{(\pi\Delta_i + L_0)^{m_i}}$$

Dacă presupunem că $m_i \Delta_i = k_i$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, k_i fiind constante, atunci:

$$\lim_{\substack{m_1 \to \infty \\ \ldots \\ m_s \to \infty}} E\left(\sigma^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right) = e^{-\frac{k\pi}{L_0}} S_0 \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{r_i!} \left(\frac{\pi k_i}{L_0}\right)^{r_i}$$

unde $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$ este o constantă.

Dacă $m_1 = m_2 = \ldots = m_s$ și $r_1 = r_2 = \ldots = r_s = r$ $(s = 1)$, din relațiile precedente se obțin relațiile corespunzătoare date de Santaló [64]:

(1.37′)
$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \sigma^r_m dG_1 \wedge \ldots \wedge dG_m = S_0 \binom{m}{r} (\pi\Delta)^r L_0^{m-r}$$

(1.38′)
$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} L^r_m dG_1 \ldots dG_m = \binom{m}{r} (\pi\Delta)^r L_0^{m-r} [L_0 + r(\pi\Delta)^{-1} \cdot 2\pi S_0 +$$

$$+ (m - r) L_0^{-1} \cdot 2\pi S_0]$$

Scanned with OKEN Scanner

(1.39′) $$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} N_m^r \, dG_1 \wedge dG_2 \wedge \ldots \wedge dG_m = \binom{m}{r} (\pi\Delta)^r L_0^{m-r} [1 +$$

$$+ r(r-1)(\pi\Delta)^{-2}\pi S_0 + (m-r)(m-r-1)L_0^{-2}\pi S_0 +$$

$$+ 2\pi S_0 L^{-1} r(m-r)(\pi\Delta)^{-1} + L_0 r(\pi\Delta)^{-1} + m - r]$$

(1.40′) $$E(\sigma_m^r) = \frac{\binom{m}{r}(\pi\Delta)^r L_0^{m-r}}{(\pi\Delta + L_0)^m} S_0$$

(1.41′) $$p = \frac{\binom{m}{r}(\pi\Delta)^r L_0^{m-r}}{(\pi\Delta + L_0)^m}$$

§4.2. TEOREMA LUI H. E. ROBBINS — APLICAȚII

4.2.1. TEOREMA LUI H. E. ROBBINS

Dacă X este o mulțime aleatoare, măsurabilă Lebesgue, din spațiul euclidian cu n dimensiuni R_n, cu măsura $\mu(X)$, atunci notînd cu $E[\mu(X)]$ valoarea medie a măsurii X, avem formula [59]:

(2.1) $$E[\mu(X)] = \int_{E_n} P(x \in X) d\mu(X)$$

unde $P(x \in X)$ reprezintă probabilitatea ca un punct x din spațiul R_n să aparțină mulțimii aleatoare X.

În aceeași lucrare se stabilește formula integrală:

(2.2) $$E[\mu^m(X)] = \int_{R_{mn}} p(x_1, x_2, \ldots, x_m) d\mu(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

unde

(2.3) $$p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = P(x_1 \in X \text{ și } x_2 \in X \text{ și, } \ldots, \text{ și } x_m \in X)$$

adică probabilitatea ca $x_i \in X$; $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

4.2.2. O APLICAȚIE DATĂ DE H. E. ROBBINS

1) *O valoare medie.* Fie a, p, B numere pozitive, astfel ca $(B + a)p \leqslant a$ și $a \leqslant B$; pe axa reală se aleg în mod independent, N intervale: $I_1, I_2, \ldots, I_N$; fiecare de lungime a. Densitatea de probabilitate, pentru centrul fiecărui interval este $\frac{p}{a}$ pentru

$$-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant B + \frac{a}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dat intervalul $I = [0, B]$ se notează cu X, mulțimea aleatoare:

$$X = I \cap \left(\bigcup_{i=1}^{N} I_i \right) \tag{2.4}$$

Se pune problema de a se calcula, media și dispersia măsurii Lebesgue $\mu(X)$.

Probabilitatea ca un punct $x \in I$ să aparțină intervalului I_α este $\frac{p}{a} \cdot a = p$; $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$.

Probabilitatea ca $x \in I$ să aparțină mulțimii aleatoare X, notată $p(x)$ este:

$$P(x \in X) = p(x) = \begin{cases} 1 - (1-p)^N & \text{pentru } x \in [0, B] \\ 0 & \text{dacă } x \notin [0, B] \end{cases} \tag{2.5}$$

Din (2.1) rezultă că:

$$E(\mu(X)) = \int_0^B p(x)\mathrm{d}x = B[1 - (1-p)^N] \tag{2.6}$$

2) *Calculul dispersiei.* Din (2.2) și (2.3):

$$E[\mu^2(X)] = \int_0^B \int_0^B p(x, y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{2.7}$$

unde

$$p(x, y) = P(x \in X \text{ și } y \in X) \tag{2.8}$$

Cum pentru evenimentele A_1, A_2,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) - 1$$

unde $\bar{A}_i$ este evenimentul contrar evenimentului A_i, urmează:

$$p(x, y) = P(x \in X) + P(y \in X) + P(x \notin X \text{ și } y \notin X) - 1 \tag{2.9}$$

În egalitatea precedentă primii doi termeni sînt dați de (2.5); notînd cu $h(x, y) = P(x \notin X \text{ și } y \notin X)$ avem:

$$h(x, y) = \begin{cases} (1-2p)^N, & \text{dacă } |y - x| \geqslant a \\ \left[1 - \frac{p}{a}(a + |y - x|)\right]^N = \left(\frac{a - ap - p|y - x|}{a}\right)^N, & \\ \text{dacă } |y - x| < a & \end{cases} \tag{2.10}$$

Ținînd seama de (2.9), (2.10) și (2.5), în (2.7) urmează

$$E[\mu^2(X)] = \int_0^B \int_0^B [1 - 2(1-p)^N + h(x, y)]\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y =$$

$$= B^2[1 - 2(1-p)^N] + 2\int_0^B \int_x^B h(x, y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuînd calculele, se obţine:

$$E[\mu^2(X)] = B^2[1 - 2(1-p)^N] + (B-a)^2(1-2p)^N + \frac{2aB(1-p)^{N+1}}{(N+1)p} -$$

(2.11)

$$- \frac{2a(B-a)(1-2p)^{N+1}}{(N+1)p} - \frac{2a^2}{(N+1)(N+2)p^2}[(1-p)^{N+2} - (1-2p)^{N+2}]$$

Din (2.6) şi (2.11) rezultă că dispersia σ^2 are expresia:

$$\sigma^2 = E[\mu^2(X)] - [E(\mu(X))]^2 =$$

(2.11′)

$$= (B-a)^2(1-2p)^N - B^2(1-p)^{2N} + \frac{2aB(1-p)^{N+1}}{(N+1)p} -$$

$$- \frac{2a(B-a)(1-2p)^{N+1}}{(N+1)p} - \frac{2a^2}{(N+1)(N+2)p^2}[(1-p)^{N+2} - (1-2p)^{N+2}]$$

4.2.3. APLICAŢII ALE TEOREMEI LUI H. E. ROBBINS

Dacă notăm:

(2.12)

$$p_i = \frac{2\pi S_i}{2\pi(S_0 + S_i) + L_0 L_i}$$

$$q_i = \frac{2\pi S_0 + L_0 L_i}{2\pi(S_0 + S_i) + L_0 L_i}$$

aplicînd teorema lui H. E. Robbins în (1.3) avem ca mulţime aleatoare X, mulţimea corespunzătoare configuraţiei geometrice $K_0 \cap K^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}$ iar măsura $\mu(X) = \sigma^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}$.

Dacă considerăm p_i din (2.12) drept probabilitatea ca un punct $M \in K_0$ să aparţină figurii convexe K_i, avem că probabilitatea ca un punct M din K_0 să aparţină configuraţiei geometrice $K_0 \cap K^{r_1 \dots r_s}_{m_1 \dots m_s}$ este egală cu

(2.13)

$$\prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} p_i^{r_i} q_i^{m_i - r_i}$$

adică o constantă [26].

Formula (1.3) rezultă din (2.1) şi anume:

(2.14)

$$E\left(\sigma^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}\right) = \int_{P \in K_0} \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} p_i^{r_i} q_i^{m_i - r_i} \, dP$$

În acelaşi mod se poate obţine şi rezultatul corespunzător dat de Santaló în lucrarea [64].

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu K_m^r configurația geometrică formată cu punctele comune a $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_s$, din cele $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$ figuri convexe date, $r_i \leqslant m_i$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$ probabilitatea ca un punct $M \in K_0$ să aparțină configurației geometrice $K_0 \cap K_m^r$ este dată de:

(2.15) $$\sum_{r_1+r_2+\ldots+r_s=r} \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} p_i^{r_i} q_i^{m_i-r_i}$$

Aplicînd formula (2.1), obținem pentru valoarea medie a ariei σ_m^r corespunzătoare configurației $K_0 \cap K_m^r$ expresia:

(2.16) $$E(\sigma_m^r) = S_0 \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_s=r} \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} p_i^{r_i} q_i^{m_i-r_i}$$

Dacă figurile convexe sînt egale, atunci:

(2.17) $$E(\sigma_m^r) = S_0 p^r q^{m-r} \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_s=r} \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i}$$

Dar

(2.18) $$\sum_{r_1+r_2+\ldots+r_s=r} \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} = \binom{m}{r}$$

unde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$.

Deci (2.17) devine:

(2.19) $$E(\sigma_m^r) = S_0 \binom{m}{r} p^r q^{m-r}$$

cu

(2.12′) $$p = \frac{2\pi S}{2\pi(S_0 + S) + L_0 L}$$

$$q = \frac{2\pi L_0 + L_0 L}{2\pi(S_0 + S) + L_0 L}$$

Probleme asemănătoare se pot pune și pentru variabilele aleatoare $L_{m_1 m_2 \ldots m_s}^{r_1 r_2 \ldots r_s}$, $N_{m_1 m_2 \ldots m_s}^{r_1 r_2 \ldots r_s}$, de asemenea pentru benzi cu laturile paralele [26].

§4.3. PROCESE POISSON

4.3.1. PROCESE POISSON ÎN PLANUL EUCLIDIAN

1) Presupunem că *numărul* figurilor convexe care intersectează figura convexă K_0, de poziție fixă, este *aleator*. Notînd cu $\xi(K_0)$ variabila aleatoare respectivă, distribuția acesteia va fi de forma:

(3.1) $$\xi(K_0): \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & m & \ldots \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_m & \ldots \end{pmatrix}; \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

În această nouă ipoteză, valoarea medie $E(\sigma'_m)$, dată de formula (1.5'), reprezintă media condiționată pentru cazul cînd $\xi(K_0) = m$.

Notînd cu K^r mulțimea aleatoare formată din punctele comune a r figuri convexe, iar cu $\sigma^{(r)}$ măsura Lebesgue a mulțimii aleatoare $K_0 \cap K^{(r)}$ avem [30]:

$$E(\sigma'_m) = E(\sigma^{(r)}/\xi(K_0) = m) \tag{3.2}$$

Din [30],

$$E(\sigma^{(r)}) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m E(\sigma'_m) \tag{3.3}$$

Folosind (2.12'), (1.5') se scrie:

$$E(\sigma'_m) = \binom{m}{r} p^r q^{m-r} S_0 \tag{3.3'}$$

de unde (3.3) devine:

$$E(\sigma^{(r)}) = \sum_{m=r}^{\infty} p_m \binom{m}{r} p^r q^{m-r} S_0 \tag{3.3''}$$

Dacă

$$p_m = e^{-\lambda S_0} \frac{(\lambda S_0)^m}{m!}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

din (3.3'') rezultă formula integrală:

$$E(\sigma^{(r)}) = \frac{(p\lambda S_0)^r}{r!} e^{-\lambda p S_0} S_0; \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

Se observă că

$$\sum_{r=0}^{\infty} E(\sigma^{(r)}) = S_0 \tag{3.6}$$

După teorema lui H. E. Robbins, probabilitatea ca un punct $M \in K_0$ să aparțină mulțimii aleatoare $K^{(r)}$ are expresia:

$$\frac{(p\lambda S_0)^r}{r!} e^{-\lambda p S_0}. \tag{3.7}$$

În cazul benzilor cu laturile paralele, formulele (3.5) și (3.7) au aceeași formă dar p se înlocuiește cu:

$$\tilde{p} = \frac{\pi\Delta}{\pi\Delta + L_0} \tag{3.8}$$

de unde rezultă formula integrală:

$$E(\sigma^{(r)}) = \frac{S_0}{r!} \left(\frac{\pi\Delta\lambda S_0}{\pi\Delta + L_0} \right)^r e^{-\frac{\pi\Delta\lambda S_0}{\pi\Delta + L_0}} \tag{3.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu notaţiile (2.12′) formula (1.12′) se scrie:

(3.10)

$$E(L'_m) = \binom{m}{r} p^r q^{m-r} [L_0 + rS^{-1}S_0L + (m-r)(2\pi S_0 + L_0L)^{-1}2\pi S_0L]$$

Dacă $L^{(r)}$ reprezintă lungimea frontierei configuraţiei geometrice $K_0 \cap K^{(r)}$, ţinînd seama de (3.1) avem:

$$E(L^{(r)}) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m E(L'_m) \tag{3.11}$$

Cînd p_m are expresia (3.4), atunci:

(3.12)

$$E(L^{(r)}) = \frac{(p\lambda S_0)^r}{r!} e^{-\lambda p S_0} [L_0 + rS^{-1}S_0L + q\lambda S_0(2\pi S_0L)(2\pi S_0 + L_0L)^{-1}]$$

În cazul benzilor cu laturile paralele:

$$E(L^r) = \frac{(\tilde{p}\lambda S_0)^r}{r!} e^{-\lambda \tilde{p} S_0} [L_0 + r(\pi\Delta)^{-1}2\pi S_0 + 2(\tilde{q}\lambda S_0)L_0^{-1}(\pi S_0)] \tag{3.12′}$$

unde $q = 1 - p$.

Dacă notăm cu $N^{(r)}$ numărul de domenii simplu conexe din care este formată mulţimea aleatoare $K_0 \cap K^{(r)}$, valoarea medie a acesteia va fi

$$E(N^{(r)}) = \sum_{m=0}^{\infty} E(N'_m) p_m \tag{3.13}$$

unde $E(N'_m)$ este dat de (1.34′). Folosind (2.12′) şi (3.4) formula (3.13) are expresia:

$$\begin{aligned} E(N^r) = \frac{(p\lambda S_0)^r}{r!} e^{-\lambda p S_0} \{1 + [(q\lambda S_0)A^{-1} + r(2\pi S)^{-1}]2\pi S_0 + \\ + r(r-1)(2\pi S)^{-2}\pi S_0L^2 + (q\lambda S_0)^2A^{-2}\pi S_0L^2 + \\ + r(q\lambda S_0)S^{-1}A^{-1}S_0L^2 + r(2\pi S)^{-1}L_0L + (q\lambda S_0)A^{-1}L_0L\} \end{aligned} \tag{3.13′}$$

Cu A s-a notat (1.33′).

În cazul benzilor cu laturile paralele, formula (3.13′) devine:

$$\begin{aligned} E(N^{(r)}) = \frac{(\tilde{p}\lambda S_0)^r}{r!} e^{-\lambda \tilde{p} S_0} \{1 + [r(r-1)(\pi\Delta)^{-2} + (\tilde{q}\lambda S_0)^2L_0^{-2} + \\ + 2L_0^{-1}r(\tilde{q}\lambda S_0)(\pi\Delta)^{-1}]\pi S_0 + L_0r(\pi\Delta)^{-1} + \tilde{q}\lambda S_0\}; \; r = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3.14}$$

2) Din (3.3′), după teorema lui H. E. Robbins, probabilitatea notată p'_m ca un punct din K_0 să aparţină la r din cele m figuri convexe date, este:

$$p'_m = \binom{m}{r} \frac{(2\pi S)^r(2\pi S_0 + L_0L)^{m-r}}{[2\pi(S_0 + S) + L_0L)]^m} \tag{3.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

În lucrarea [68] se face ipoteza că figura K_0 se extinde la întreg planul, astfel ca:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ S_0\to\infty}} \frac{m}{S_0} = \rho \tag{3.16}$$

unde ρ este o constantă pozitivă.

În acest caz

$$\lim p_m^r = \frac{(\rho S)^r}{r!} e^{-\rho S} \tag{3.17}$$

În ipoteza (3.16) din (1.5'), (1.12'), (1.34'), se obțin următoarele rezultate:

$$\lim E\left(\frac{\sigma_m^r}{S_0}\right) = \frac{(\rho S)^r}{r!} e^{-\rho S} \tag{3.18}$$

$$\lim E\left(\frac{L_m^r}{S_0}\right) = \frac{(\rho S)^r}{r!} (rLS^{-1} + \rho L) \cdot e^{-\rho S} \tag{3.19}$$

$$\lim E\left(\frac{N_m^r}{S_0}\right) = \frac{(\rho S)^r}{r!} [\rho + rS^{-1} + \pi r(r-1)(2\pi S)^{-2}L^2 + \\ + (4\pi)^{-1}\rho^2 L^2 + r\rho L^2(2\pi S)^{-1}] \cdot e^{-\rho S} \tag{3.20}$$

$r = 0, 1, 2, \ldots$, unde s-a ținut seamă că $\lim \frac{L_0}{S_0} = 0$ [68], dacă are loc egalitatea (3.16).

Pentru benzile cu laturile paralele, dacă se face ipoteza:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ L_0\to\infty}} \frac{m}{L_0} = \lambda \tag{3.21}$$

K_0 extinzîndu-se la întreg planul, din (1.40'), (1.38'), (1.39') se obțin următoarele rezultate:

$$\lim E\left(\frac{\sigma_m^r}{S_0}\right) = \frac{(\pi\lambda\Delta)^r}{r!} e^{-\lambda\pi\Delta} \tag{3.22}$$

$$\lim E\left(\frac{L_m^r}{S_0}\right) = 2\frac{(\pi\lambda\Delta)^r}{r!} e^{-\lambda\pi\Delta}[\pi\lambda + r\Delta^{-1}] \tag{3.23}$$

$$\lim E\left(\frac{N_m^r}{S_0}\right) = \frac{(\pi\Delta\lambda)^r}{r!} [\pi r(r-1)(\pi\Delta)^{-2} + \pi\lambda^2 + 2r\lambda\Delta^{-1}]e^{-\lambda\pi\Delta} \tag{3.24}$$

4.2.3. PROCESE POISSON PE O DREAPTĂ

Se consideră că numărul punctelor dintr-un interval I, de lungime $|I|$ este o variabilă aleatoare, cu distribuția Poisson, avînd valoarea medie $\lambda|I|$, λ fiind o constantă.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel dat un punct M de pe dreaptă, probabilitatea ca într-un interval de lungime x, ce conține M, să nu se afle nici un punct aleator, este egală cu $e^{-\lambda x}$; probabilitatea este aceeași și în cazul cînd M este extremitatea stîngă sau dreaptă, a intervalului respectiv (Fig. 4.3.1).

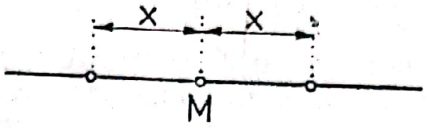

Fig. 4.3.1.

Dacă M este un punct oarecare, în particular un punct aleator, notînd cu x distanța pînă la cel mai apropiat punct aleator, densitatea de probabilitate respectivă $\lambda e^{-\lambda x}$, adică $2\lambda x$ are distribuția lui χ^2 cu două grade de libertate. Se știe că repartiția χ^2 are densitatea de probabilitate [50];

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}\sigma^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}; \; 0 \leqslant x < \infty,$$

s număr natural, care dă numărul gradelor de libertate iar $\sigma > 0$ este un număr dat.

Din ipoteză, notînd cu $P_n(a, b)$ probabilitatea ca în intervalul (a, b) să se afle n puncte, avem

$$P_n(a, b) = e^{-\lambda(b-a)} \frac{[\lambda(b-a)]^n}{n!}; \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Se observă că $P_n(a, b)$ verifică egalitatea:

$$\frac{dP_n(a, b)}{db} = -\lambda P_n(a, b) + \lambda P_{n-1}(a, b)$$

unde $P_n(a, b) = 0$ pentru $n < 0$.

§4.4. FORMULELE DATE DE J. BRONOWSKI ȘI J. NEYMAN

1) Să considerăm în planul euclidian un dreptunghi R cu laturile a, b, de poziție fixă, R' un dreptunghi concentric cu R avînd laturile $a + \gamma$, $b + \gamma$ paralele respectiv cu laturile a, b și un dreptunghi ρ cu laturile α, β ($\alpha < 2\gamma$, $\beta < 2\gamma$) avînd centrul respectiv de poziție aleatoare. Dreptunghiul ρ are de asemenea laturile α, β paralele cu laturile a respectiv b. S-au notat cu aceeași literă, atît laturile cît și lungimile respective.

Se fac următoarele ipoteze:

1) Probabilitatea ca ρ să aibe centrul respectiv exact de s ori în interiorul lui R' este P_s ($s = 0, 1, 2, \ldots$), adică este cunoscută funcția generatoare

$$\Psi^*(u) = \sum_{s=0}^{\infty} u^s P_s \tag{4.1}$$

2) Dacă în interiorul lui R' se află de s ori centrul lui ρ, (s fix), probabilitatea ca dintre acestea exact k să se afle în submulțimea lui R', de arie ω are expresia binomială

$$\frac{s!}{k!(s-k)!}\left(\frac{\omega}{R'}\right)^k\left(1-\frac{\omega}{R'}\right)^{s-k} \tag{4.2}$$

În ipotezele de mai sus, se notează cu X mulțimea acelor puncte din R care sînt acoperite cel puțin odată de dreptunghiul ρ iar cu $\mu(X)$ măsura Lebesgue respectivă. Valorile medii corespunzătoare se notează cu: $E(\mu(X))$ sau $E(\mu(X)/s)$ cînd s este fix [8].

Aplicînd formula lui H. E. Robbins (2.1) se obțin următoarele rezultate:

$$E(\mu(X)/s) = ab\left\{1-\left(1-\frac{\alpha\beta}{R'}\right)^s\right\} \tag{4.3}$$

$$E(\mu(X)) = ab\left\{1-\psi\left(1-\frac{\alpha\beta}{R'}\right)\right\} \tag{4.4}$$

În particular, pentru o repartiție Poisson:

$$P_s = e^{-\lambda R'}\frac{(\lambda R')^s}{s!},\quad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.5}$$

$$\psi(u) = e^{\lambda R'(u-1)} \tag{4.6}$$

și deci

$$E(\mu(X)) = ab\{1-e^{-\lambda\alpha\beta}\} \tag{4.7}$$

2) Se pune problema de a se determina momentul de ordinul doi pentru variabila aleatoare $\mu(X)$.

Pentru ușurarea scrierii se va folosi notația X atît pentru mulțimea X cît și pentru măsura Lebesgue respectivă.

Fie

$$Y = ab - X \tag{4.8}$$

și se notează $m(a,\ b/s)$, $m(a,\ b)$ momentul de ordinul doi al variabilei Y, după cum s este considerat fix sau nu.

Pentru a se determina $m(a,\ b/s)$ se calculează mai întîi:

$$D(a,\ b/s) = \frac{\partial^2 m(a,\ b/s)}{\partial a\partial b} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta a\to 0\\ \Delta b\to 0}} \frac{m(a+\Delta a,\ b+\Delta b/s) - m(a,\ b+\Delta b/s) - m(a+\Delta a,\ b/s) + m(a,\ b/s)}{\Delta a\cdot\Delta b} = \lim_{\substack{\Delta a\to 0\\ \Delta b\to 0}} \frac{I(\Delta a,\ \Delta b)}{\Delta a\cdot\Delta b} \tag{4.9}$$

unde s-a notat:

$$I(\Delta a,\ \Delta b) = m(a+\Delta a,\ b+\Delta b/s) - m(a,\ b+\Delta b/s) - m(a+\Delta a,\ b/s) + m(a,\ b/s) \tag{4.10}$$

După determinarea expresiei $D(a,\ b/s)$, $m(a,\ b/s)$ va rezulta prin două operații de integrare.

Scanned with OKEN Scanner

Fie dreptunghiul de dimensiuni $(a + \Delta a)$, $(b + \Delta b)$ aşa cum rezultă din figura 4.4.1.

S-a notat cu U, V, W variabilele aleatoare de tipul (4.8) corespunzătoare respectiv dreptunghiurilor de dimensiuni: $(\Delta a, b)$, $(a, \Delta b)$, $(\Delta a, \Delta b)$, aşa cum Y corespunde dreptunghiului R de dimensiuni (a, b).

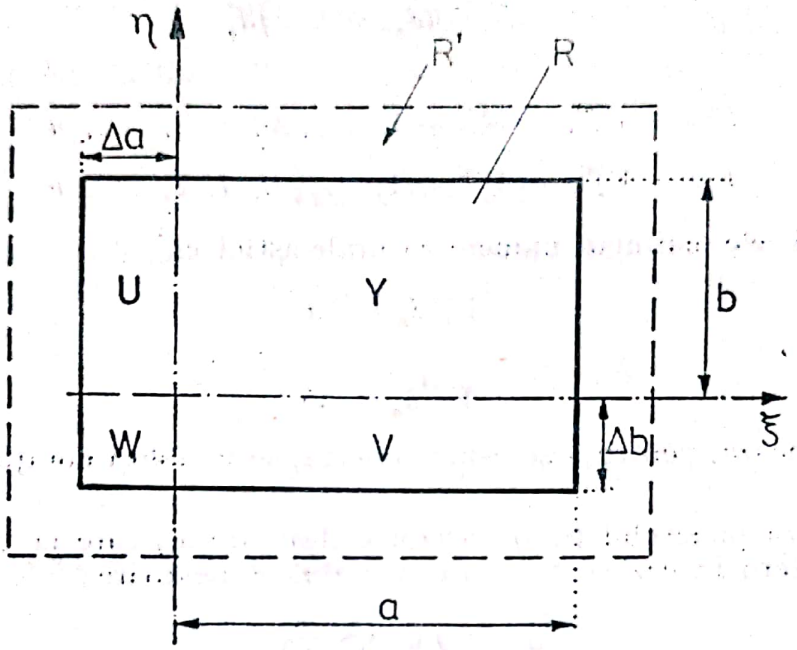

Fig. 4.4.1.

Din (4.10) rezultă că

$$I(\Delta a, \Delta b) = 2E(YW) + 2E(UV) + 2E(VW) + \tag{4.11}$$
$$+ 2E(UW) + E(W^2)$$

Ţinîndu-se seamă de inegalităţile

$$0 \leqslant U \leqslant b\Delta a$$
$$0 \leqslant V \leqslant a\Delta b \tag{4.12}$$
$$0 \leqslant W \leqslant \Delta a\Delta b$$

unde s-a presupus pentru uşurinţa scrierii $\Delta a > 0$, $\Delta b > 0$; se obţine

$$0 \leqslant E(UW) \leqslant b(\Delta a)^2(\Delta b)$$
$$0 \leqslant E(VW) \leqslant a(\Delta a)\ (\Delta b)^2 \tag{4.13}$$
$$0 \leqslant E(W^2) \leqslant (\Delta a \cdot \Delta b)^2$$

Din (4.10), (4.11) şi (4.12), rezultă că:

$$D(a, b/s) = 2 \lim_{\substack{\Delta a \to 0 \\ \Delta b \to 0}} \frac{E(YW) + E(UV)}{\Delta a \Delta b} \tag{4.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie

$$d_n = \frac{a}{n+1}, \quad \delta_n = \frac{b}{n+1} \tag{4.15}$$

n, număr natural şi punctele (i, j) de coordonate

$$\xi_i^{(n)} = id_n, \quad \eta_j^{(n)} = j\delta_n \tag{4.16}$$

unde

$$i = -V_1^{(n)}, \ -V_1^{(n)} + 1, \ \ldots, \ 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n$$

$$j = -V_2^{(n)}, \ -V_2^{(n)} + 1, \ \ldots, \ 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n$$

$V_1^{(n)}$, $V_2^{(n)}$ fiind cele mai mari numere naturale astfel ca

$$V_1^{(n)} d_n \leqslant \Delta a$$

$$V_2^{(n)} \delta_n \leqslant \Delta b \tag{4.17}$$

În cele ce urmează, pentru a se uşura scrierea, se va folosi notaţia V_1, V_2 în loc de $V_1^{(n)}$, $V_2^{(n)}$.

Se asociază punctului (i, j) variabila aleatoare x_{ij} care ia valoarea 1 cînd $(i, j) \leqq \rho$ şi zero în caz contrar. Fie variabilele aleatoare:

$$Y_n = d_n \delta_n \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}$$

$$U_n = d_n \delta_n \sum_{i=-V_1}^{0} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}$$

$$V_n = d_n \delta_n \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=-V_2}^{0} x_{ij} \tag{4.18}$$

$$W_n = d_n \delta_n \sum_{i=-V_1}^{0} \sum_{j=-V_2}^{0} x_{ij}$$

Pentru s fix, mulţimea aleatoare este formată dintr-o reuniune de poligoane, cu laturile de lungime finită. Deci pentru s fix, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există numărul $N_\varepsilon(s)$ astfel încît măsura:

$$|Y - Y_n| < \varepsilon, \text{ dacă } n > N_\varepsilon(s) \tag{4.19}$$

Inegalităţi asemănătoare se pot scrie pentru variabilele aleatoare U_n, V_n, W_n.

Urmează că

$$\lim_{n \to \infty} E(Y_n W_n / s) = E(YW/s)$$

$$\lim_{n \to \infty} E(U_n V_n / s) = E(UV/s) \tag{4.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$E(Y_n W_n/s) = (d_n\delta_n)^2 \sum_{i=-V_1}^{0} \sum_{j=-V_2}^{0} E\left(x_{ij} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} x_{kl}/s\right)$$

(4.21)

$$E(U_n V_n/s) = (d_n\delta_n)^2 \sum_{i=-V_1}^{0} \sum_{j=0}^{n} E\left(x_{ij} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-V_2}^{0} x_{kl}/s\right)$$

Deoarece în (4.9) Δa, Δb tind către zero, se poate presupune că :

$$0 \leqslant \Delta a < \gamma - \alpha/2$$

(4.22)

$$0 \leqslant \Delta b < \gamma - \beta/2$$

Cum variabilele aleatoare x_{ij} şi x_{kl} iau numai valorile zero respectiv unu, media produsului lor va fi egală cu probabilitatea ca $(i, j) \not\equiv \rho$ şi $(k, l) \not\equiv \rho$.

Pentru s fixat, dacă

(4.23) $$d_n|i - k| < \alpha \text{ şi } d_n|j - l| < \beta$$

atunci

(4.24) $$E(x_{ij}x_{kl}/s) = \left\{1 - \frac{2\alpha\beta - (\alpha - d_n|i - k|)(\beta - \delta_n|j - l|)}{R'}\right\}^s$$

Dacă condiţia (4.23) nu are loc, atunci :

(4.25) $$E(x_{ij}x_{kl}/s) = \left[1 - \frac{2\alpha\beta}{R'}\right]^s$$

Avîndu-se în vedere (4.20) din (4.23), (4.24), (4.25), se observă că $E(x_{ij}x_{kl}/s)$ este o funcţie numai de variabile $i - k$ şi $j - l$. Notînd

(4.26) $$E(\theta_n/s) = d_n^2\delta_n^2 \sum_{i=-V_1}^{0} \sum_{j=-V_2}^{0} E\left(x_{ij} \sum_{k=i}^{n+i} \sum_{l=j}^{n+j} x_{kl}/s\right)$$

rezultă că

(4.27) $$E\left(x_{ij} \sum_{k=i}^{n+i} \sum_{l=j}^{n+j} x_{kl}/s\right) = E\left(x_{00} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} x_{kl}/s\right),$$

de unde

$$E(\theta_n/s) = (V_1 + 1)(V_2 + 1)d_n^2\delta_n^2 E\left(x_{00} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} x_{kl}/s\right) =$$

(4.28)

$$= \left[(V_1 + 1)(V_2 + 1)d_n\delta_n\right]\left[d_n\delta_n \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} E(x_{00}x_{kl}/s)\right]$$

Expresia din prima paranteză mare tinde către $\Delta a \cdot \Delta b$ cînd $n \to \infty$, iar limita celei de a doua paranteze este :

(4.29) $$\int_0^a \int_0^b f^s(\xi, \eta)\, d\xi \wedge d\eta$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$f(\xi, \eta) = 1 - \frac{2\alpha\beta - (\alpha - \xi)(\beta - \eta)}{R'} \tag{4.30}$$

dacă

$$0 \leqslant \xi \leqslant \alpha \quad \text{şi} \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \beta \tag{4.31}$$

ar, în caz contrar:

$$f(\xi, \eta) = \left(1 - \frac{2\alpha\beta}{R'}\right) \tag{4.32}$$

Ţinînd seama că variabilele x_{kl} iau numai valorile zero sau unu, diferenţa dintre

$$x_{ij} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} x_{kl} \quad \text{şi} \quad x_{ij} \sum_{k=i}^{n+i} \sum_{l=j}^{n+j} x_{kl} \tag{4.33}$$

în valoare absolută este mai mică decît $n(V_1 + V_2)$.

Din (4.21) şi (4.26), ţinînd seamă de cele de mai sus, rezultă:

$$E(Y_n W_n/s) - E(\theta_n/s) \leqslant [d_n \delta_n (V_1 + 1)(V_2 + 1)] \cdot \cdot (n\delta_n V_1 d_n + n d_n V_2 \delta_n) \tag{4.34}$$

Dacă $n \to \infty$, membrul drept al relaţiei precedente are limita

$$\Delta a \cdot \Delta b(b\Delta a + a\Delta b) \tag{4.35}$$

Deci

$$\lim_{\substack{\Delta a \to 0 \\ \Delta b \to 0}} \frac{\lim_{n\to\infty} E(\theta_n/s)}{\Delta a \Delta b} = \lim_{\substack{\Delta a \to 0 \\ \Delta b \to 0}} \frac{E(Y \cdot W/s)}{\Delta a \Delta b} = \int_0^a \int_0^b f^s(\xi, \eta) d\xi \wedge d\eta \tag{4.36}$$

Analog se poate determina

$$\lim_{\substack{\Delta a \to 0 \\ \Delta b \to 0}} \frac{E(UV/s)}{\Delta a \Delta b}$$

În loc de a se considera $E(U_n V_n/s)$ în egalitatea doua din (4.21) se consideră:

$$E(\varphi_n/s) = (d_n \delta_n)^2 \sum_{i=-V_1}^{0} \sum_{j=0}^{n} E\left(x_{ij} \sum_{k=i}^{n+i} \sum_{l=-V_1}^{0} x_{kl}\right) \tag{4.37}$$

şi se poate arăta uşor că:

$$\lim_{n\to\infty} [E(U_n V_n/s) - E(\varphi_n/s)] \leqslant b(\Delta a)^2(\Delta b) \tag{4.38}$$

Astfel în (4.14) şi (4.20) se poate folosi (4.37) în loc de (4.21), cea de a doua egalitate.

Cum $E(x_{ij}x_{kl}/s)$ depinde numai de diferenţele $i-k$ şi $j-l$

$$E\left(x_{ij}\sum_{k=i}^{n+i}\sum_{l=-V_2}^{0}x_{kl}\right)=E\left(x_{0j}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-V_2}^{0}x_{kl}\right) \tag{4.39}$$

şi deci

$$E(\varphi_n/s)=d_n(V_1+1)\left[d_n\delta_n^2\sum_{j=0}^{n}E\left(x_{0j}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-V_2}^{0}x_{kl}/s\right)\right] \tag{4.40}$$

Dar

$$\sum_{j=0}^{n}E\left(x_{0j}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-V_2}^{0}x_{kl}/s\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-V_2}^{0}E\left(x_{kl}\sum_{j=0}^{n}x_{0j}/s\right) \tag{4.41}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-V_2}^{0}E\left(x_{kl}\sum_{j=0}^{n}x_{0j}/s\right)=(V_2+1)\sum_{k=0}^{n}E\left(x_{k0}\sum_{j=0}^{n}x_{0j}/s\right)= \tag{4.42}$$

$$=(V_2+1)\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}E(x_{k0}x_{0j}/s)$$

Deci limita expresiei $E(U_nV_n/s)$ din (4.21) poate fi înlocuită prin:

$$\lim_{n\to\infty}[d_n(V_1+1)\delta_n(V_2+1)]\left[d_n\delta_n\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}E(x_{k0}x_{0j}/s)\right]= \tag{4.43}$$

$$=\Delta a\cdot\Delta b\int_0^a\int_0^b f^s(\xi,\eta)\,d\xi\wedge d\eta$$

unde funcţia $f(\xi,\eta)$ este dată prin expresiile (4.30), (4.32).

Ţinînd seamă de (4.43) şi (4.36) în (4.14), urmează formula integrală:

$$D(a,b/s)=4\int_0^a\int_0^b f^s(\xi,\eta)\,d\xi\wedge d\eta \tag{4.44}$$

3) În continuare se vor da diferite forme pentru formula (4.44), ţinînd seamă de $f(\xi,\eta)$ care are una din expresiile (4.30), (4.32) şi de relaţiile dintre a, b, α, β.

Dacă

$$a\leqslant\alpha\text{ şi }b\leqslant\beta \tag{4.45}$$

funcţia $f(\xi,\eta)$ are expresia (4.30) pentru întregul domeniu de integrare, iar (4.44) devine:

$$D_1=4\int_0^a\int_0^b\left(1-\frac{2\alpha\beta-(\alpha-\xi)(\beta-\eta)}{R'}\right)^s d\xi\wedge d\eta= \tag{4.46}$$

$$=4\int_{\alpha-a}^{\alpha}\int_{\beta-b}^{\beta}g^s(t,r)\,dt\wedge dr$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă se notează $t = \alpha - \xi$, $r = \beta - \eta$ deci:

$$g(t, r) = 1 - \frac{2\alpha\beta - tr}{R'} \tag{4.47}$$

Dacă

$$a \geqslant \alpha \text{ și } b \leqslant \beta \tag{4.48}$$

funcția $f(\xi, \eta)$ are expresia (4.30) pentru

$$0 \leqslant \xi \leqslant \alpha, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant b \tag{4.49}$$

și expresia (4.32) cînd

$$\alpha \leqslant \xi \leqslant a, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant b. \tag{4.50}$$

În acest caz (4.44) se scrie:

$$D_2 = 4b(a - \alpha)\left(1 - \frac{2\alpha\beta}{R'}\right)^s + 4\int_0^{\alpha}\int_{\beta-b}^{\beta} g^s(t, r)\,dt \wedge dr \tag{4.51}$$

Analog, dacă

$$a \leqslant \alpha, \; b \geqslant \beta \tag{4.52}$$

formula (4.44) are expresia:

$$D_3 = 4a(b - \beta)\left(1 - \frac{2\alpha\beta}{R'}\right)^s + 4\int_{\alpha-a}^{\alpha}\int_0^{\beta} g^s(t, r)\,dt \wedge dr \tag{4.53}$$

În sfîrșit, dacă

$$a \geqslant \alpha \text{ și } b \geqslant \beta \tag{4.54}$$

formula (4.44) devine

$$D_4 = 4(ab - \alpha\beta)\left(1 - \frac{2\alpha\beta}{R'}\right)^s + 4\int_0^{\alpha}\int_0^{\beta} g^s(t, r)\,dt \wedge dr \tag{4.55}$$

4) Folosind relația

$$\frac{\partial^2 m(a, b/s)}{\partial a \partial b} = D(a, b/s) \tag{4.56}$$

rezultă:

$$m(a, b/s) = \int_0^a \int_0^b D(a, b/s)\,da \wedge db + A(a) + B(b) \tag{4.57}$$

unde $A(a)$, $B(b)$ sînt funcții de o singură variabilă.

Ținînd seamă că $0 \leqslant Y \leqslant ab$ se pot scrie condițiile:

$$m(a, 0/s) = m(0, b/s) = \frac{\partial m(a, 0/s)}{\partial a} = \frac{\partial m(0, b/s)}{\partial b} = 0 \tag{4.58}$$

și rezultă pentru $m(a, b/s)$ patru expresii.

Dacă $a \leqslant \alpha$ şi $b \leqslant \beta$, atunci

$$m(a,\ b/s) = m_1(a,\ b/s) = \int_0^a \int_0^b D_1(x,\ y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{4.59}$$

Dacă $a \geqslant \alpha$ şi $b \leqslant \beta$ atunci:

$$m(a,\ b/s) = m_2(a,\ b/s) = m_1(\alpha,\ b/s) + \int_\alpha^a \int_0^b D_2(x,\ y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{4.60}$$

Dacă $a \leqslant \alpha$, $b \geqslant \beta$ atunci

$$m(a,\ b/s) = m_3(a,\ b/s) = m_1(a,\ \beta/s) + \int_0^a \int_\beta^b D_3(x,\ y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{4.61}$$

Dacă, $a \geqslant \alpha$, $b \geqslant \beta$, se obţine:

$$m(a,\ b/s) = m_4(a,\ b/s) = m_1(\alpha,\ \beta/s) + \int_\alpha^a \int_0^\beta D_2(x,\ y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \tag{4.62}$$

$$+ \int_0^\alpha \int_\beta^b D_3(x,\ y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \int_\alpha^a \int_\beta^b D_4(x,\ y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Pentru calculul valorii medii $m_1(a,\ b/s)$, de exemplu, se poate scrie:

$$m_1(a,\ b/s) = \int_0^a \int_0^b D_1(x,\ y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \tag{4.63}$$

$$= 4 \int_0^a \int_0^b \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \int_{\alpha-x}^{\alpha} \int_{\beta-y}^{\beta} g^s(t,\ r)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r =$$

$$= 4 \int_0^a \mathrm{d}x \int_{\alpha-x}^{\alpha} \mathrm{d}t \left[\int_0^b \mathrm{d}y \int_{\beta-y}^{\beta} g^s(t,\ r)\mathrm{d}r \right]$$

Dacă se integrează prin părţi în raport cu y integrala dublă din paranteză, rezultă:

$$I(t) = \int_0^b \mathrm{d}y \int_{\beta-y}^{\beta} g^s(t,\ r)\mathrm{d}r = \left[y \int_{\beta-y}^{\beta} g^s(t,\ r)\mathrm{d}r \right]_0^b - \tag{4.64}$$

$$- \int_0^b y g^s(t,\ \beta - y)\mathrm{d}y = b \int_{\beta-b}^{\beta} g^s(t,\ r)\mathrm{d}r - \int_0^b y g^s(t,\ \beta - y)\mathrm{d}y$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuînd substituţia $\beta - y = r$ în ultima integrală, se obţine:

$$I(t) = b \int_{\beta-b}^{\beta} g^s(t, r)\mathrm{d}r + \int_{\beta}^{\beta-b} (\beta - r)g^s(t, r)\mathrm{d}r$$

sau

$$I(t) = \int_{\beta-b}^{\beta} (b + r - \beta)g^s(t, r)\mathrm{d}r \tag{4.65}$$

Înlocuind în (4.63), urmează, ca mai sus

$$m_1(a, b/s) = 4 \int_0^a \mathrm{d}x \int_{\alpha-x}^{\alpha} I(t)\mathrm{d}t = 4 \int_{\alpha-a}^{\alpha} (t + a - \alpha)\, I(t)\, \mathrm{d}t =$$

$$= 4 \int_{\alpha-a}^{\alpha} \mathrm{d}t \int_{\beta-b}^{\beta} (t + a - \alpha)(b + r - \beta)g^s(t, r)\mathrm{d}r \tag{4.66}$$

unde $g(t, r)$ este definită prin egalitatea (4.47).

Asemănător se pot obţine formule pentru $m_2(a, b/s)$, $m_3(a, b/s)$ şi $m_4(a, b/s)$.

Pentru a se putea scrie o singură formulă pentru $m_i(a, b/s)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ se introduce pentru orice număr real x simbolul:

$$[x] = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \tag{4.67}$$

Folosind notaţia precedentă, rezultă:

$$m(a, b/s) = 4 \int_{[\alpha-a]}^{\alpha} \int_{[\beta-b]}^{\beta} (t + a - \alpha)(b + r - \beta)\left(1 - \frac{2\alpha\beta - tr}{R'}\right)^s \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r +$$

$$+ \{a^2[b - \beta]^2 + b^2[a - \alpha]^2 - [a - \alpha]^2[b - \beta]^2\}\left(1 - \frac{2\alpha\beta}{R'}\right)^s \tag{4.68}$$

Dacă s ia valorile 0, 1, 2, ..., k, ... cu probabilităţile P_0, P_1, ..., P_k, ... date de funcţia generatoare (4.1), atunci:

$$m(a, b) = 4 \int_{[\alpha-a]}^{\alpha} \int_{[\beta-b]}^{\beta} (t + a - \alpha)(b + r - \beta)\psi\left(1 - \frac{2\alpha\beta - tr}{R'}\right) \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r +$$

$$+ \{a^2[b - \beta]^2 + b^2[a - \alpha]^2 - [a - \alpha]^2[b - \beta]^2\}\psi\left(1 - \frac{2\alpha\beta}{R'}\right) \tag{4.69}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum din (4.4) şi (4.8) momentul de ordinul întîi al variabilei aleatoare Y este dat de egalitatea

$$E(Y) = ab\psi\left(1 - \frac{\alpha\beta}{R'}\right), \tag{4.70}$$

rezultă că:

$$\sigma_y^2 = m(a,\ b) - [E(Y)]^2 \tag{4.71}$$

unde $m(a,\ b)$ are expresia (4.69).

Ţinînd seama că:

$$Y = ab - X$$

rezultă că:

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \tag{4.72}$$

5) *Aplicaţii.*

a_1) Dacă

$$\psi(u) = u^s \tag{4.73}$$

atunci numărul centrelor dreptunghiurilor, centre situate în R', este fix şi calculul dispersiei depinde de efectuarea integralei:

$$\int_{[\alpha-a]}^{\alpha} \int_{[\beta-b]}^{\beta} (t + a - \alpha)(b + r - \beta)\left[\left(1 - \frac{2\alpha\beta}{R'}\right) + \frac{tr}{R'}\right]^s dt \wedge dr \tag{4.74}$$

Se integrează termen cu termen, după ridicarea la puterea s, fiecare din integralele duble fiind un produs de două integrale simple.

a_2) Dacă

$$\psi(u) = e^{\lambda R'(u-1)} \tag{4.75}$$

atunci probabilitatea ca exact s centre ale dreptunghiurilor să se afle în R' este dată de

$$P_s = \frac{(\lambda R')^s}{s!} e^{-\lambda R'} \tag{4.76}$$

adică, avem o repartiţie de tip Poisson.

Pentru acest caz, din (4.69) rezultă:

$$m(a,\ b) = 4e^{-2\alpha\beta\lambda} \int_{[\alpha-a]}^{\alpha} \int_{[\beta-b]}^{\beta} (t + a - \alpha)(b + r - \beta) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda tr)^s}{s!} dt \wedge dr + \tag{4.77}$$

$$+ e^{-2\alpha\beta\lambda}\{a^2[b - \beta]^2 + b^2[a - \alpha]^2 - [a - \alpha]^2[b - \beta]^2\}$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd seria, termen cu termen, se obţine :

$$(4.78)\qquad \dot{m}(a,\ b) = 4e^{-2\alpha\beta\lambda}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(\lambda\alpha\beta)^s}{s!}\frac{\alpha\beta}{(s+1)^2(s+2)^2}\cdot$$

$$\cdot\left\{(s+2)a-\alpha+[\alpha-a]\left(1-\frac{a}{\alpha}\right)^{s+1}\right\}\cdot\left\{(s+2)b-\beta+\right.$$

$$\left.+[\beta-b]\left(1-\frac{b}{\beta}\right)^{s+1}\right\}+e^{-2\alpha\beta\lambda}a^2b^2$$

Deci în cazul distribuţiei Poisson, ţinînd seamă de (4.78) (4.71) şi (4.7), cum

$$E(Y) = ab - E(X) = abe^{-\lambda\alpha\beta}$$

urmează :

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 = 4e^{-2\alpha\beta\lambda}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(\lambda\alpha\beta)^s}{s!}\frac{\alpha\beta}{(s+1)^2(s+2)^2}\cdot\left\{(s+2)a-\alpha+[\alpha-a]\left(1-\frac{a}{\alpha}\right)^{s+1}\right\}\cdot$$

$$(4.79)\qquad \cdot\left\{(s+2)b-\beta+[\beta-b]\left(1-\frac{b}{\beta}\right)^{s+1}\right\}$$

a_3) Se poate considera ca funcţie generatoare

$$(4.80)\qquad \psi(u) = e^{m(e^{\lambda R'(u-1)}-1)}$$

de unde

$$(4.81)\qquad \psi(u) = e^{-m}\sum_{k\geqslant 0}\frac{m^k}{k!}e^{k\lambda R'(u-1)}$$

6) *Observaţie.* Dacă intervalul a este inclus într-un inverval a', calculînd mai întîi $\frac{\partial m(a/s)}{\partial a}$ se poate obţine

$$(4.82)\qquad m(a/s) = 2\int_{[\alpha-a]}^{\alpha}(t+a-\alpha)\left(1-\frac{2\alpha-t}{a'}\right)^s dt + [a-\alpha]^2\left(1-\frac{2\alpha}{a'}\right)^s$$

iar

$$(4.83)$$

$$m(a) = 2\int_{[\alpha-a]}^{\alpha}(t+a-\alpha)\psi\left(1-\frac{2\alpha-t}{a'}\right)dt + [a-\alpha]^2\psi\left(1-\frac{2\alpha}{a'}\right).$$

Dacă ne situăm în cazul unei distribuţii Poisson, atunci :

$$(4.84)$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 2e^{-2\alpha\lambda}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(\alpha\lambda)^s}{s!}\frac{\alpha}{(s+1)(s+2)}\cdot\left\{(s+2)a-\alpha+[\alpha-a]\left(1-\frac{a}{\alpha}\right)^{s+1}\right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

§4.5. UNELE APLICAȚII ALE TEORIEI REȚELELOR ÎN PLANUL EUCLIDIAN

În capitolul 3(§ 3.1) s-a stabilit formula:

$$\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} f(K_1\cap K_0, K_2\cap K_0, \ldots, K_m\cap K_0)\,dK_1\wedge dK_2\wedge\ldots\wedge dK_m =$$

(5.1)

$$= \int_{\{\alpha_0\}} \sum_i f(T_iK_0\cap K_1, \ldots, T_iK_0\cap K_m)\,dK_1\wedge dK_2\wedge\ldots\wedge dK_m$$

unde $\{\alpha_0\} = \alpha_0\times\alpha_0\times\ldots\times\alpha_0 = \alpha_0^m$, iar f este o funcție integrabilă nulă dacă $K_i\cap K_0 = \emptyset$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Rețeaua este formată dintr-un șir de domenii $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, domeniul α_0 se numește celula fundamentală a rețelei.

Fie o figură convexă K_0, de poziție fixă, $K_0\subset\alpha_0$ de arie S_0 și lungimea frontierei ∂K_0 egală cu L_0.

Grupul de mișcări din planul euclidian este grupul G_3, transformarea $T_i\in G_3$; orice domeniu α_i poate fi suprapus peste domeniul α_0 printr-o astfel de mișcare. Transformarea grupului G_3, T_i care suprapune domeniul α_0 peste domeniul α_i duce T_iK_0 în α_i, astfel apare K_0 reprodus în toate celulele rețelei.

1) Dacă luăm în formula (5.1):

$$f(K_1\cap K_0, \ldots, K_m\cap K_0) = \sigma^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}$$

și ținem seamă de (1.3) rezultă:

$$\text{(5.2)}\quad \int_{(\alpha_0)} \left(\sigma^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}\right)_0 dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m = S_0\prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}(2\pi S_i)^{r_i}(2\pi S_0 + L_0L_i)^{m_i-r_i}$$

unde $\left(\sigma^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}\right)_0$ este aria configurației geometrice $\bigcup_i\left(T_iK_0\cap\tilde{K}^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}\right)$.

S-a notat în (5.2) cu $\tilde{K}^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}$ configurația geometrică obținută cu punctele comune a r_1 din cele m_1 figuri convexe date, r_2 dintre m_2, r_s dintre cele m_s, unde se consideră *numai acele poziții pentru* $K_1, K_2, \ldots, K_m$ *pentru care* $P(x, y)$ *din*:

$$\text{(5.2')}\qquad dK = dP\wedge d\psi$$

aparține domeniului α_0 [27].

Deoarece ca poziție, figurile convexe $K_1, \ldots, K_m$ sînt presupuse independente [45], rezultă:

$$\text{(5.3)}\qquad \int_{\{\alpha_0\}} dK_1\wedge dK_2\wedge\ldots\wedge dK_m = (2\pi\sigma_0)^m$$

σ_0 fiind aria celulei fundamentale, iar $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$.

Scanned with OKEN Scanner

Din (5.2) și (5.3) se obține valoarea medie [27]:

$$E\left[\left(\sigma^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\right)_0\right] = S_0 \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}\left(\frac{S_i}{\sigma_0}\right)^{r_i}\left(\frac{2\pi S_0 + L_0 L_i}{2\pi\sigma_0}\right)^{m_i - r_i} \tag{5.4}$$

Avem deci următorul rezultat:

Teorema 5.1. Fie în planul euclidian o rețea regulată a cărei celulă fundamentală are aria σ_0. *Dacă figura convexă* $K_0 \subset \alpha_0$, *atunci există cel puțin o poziție a unui sistem format din* m *figuri convexe,* $K_1, K_2, \dots, K_m$, *dintre care* m_i *egale între ele* $(i = 1, 2, \dots, s)$, *aleatoare în raport cu măsura* (5.2'), *independente între ele (ca poziție) astfel ca aria configurației geometrice* $\bigcup_i \left(T_i K_0 \cap \tilde{K}^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\right)$ *să fie cel puțin egală cu*

$$S_0 \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}\left(\frac{S_i}{\sigma_0}\right)^{r_i}\left(\frac{2\pi S_0 + L_0 L_i}{2\pi\sigma_0}\right)^{m_i - r_i}$$

2) Luînd în formula (5.1):

$$f(K_1 \cap K_0, \dots, K_m \cap K_0) = L^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}$$

și ținînd seamă de (1.11), rezultă:

$$\int_{\{\alpha_0\}} \left(L^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\right)_0 \mathrm{d}K_1 \wedge \mathrm{d}K_2 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}K_m = \tag{5.5}$$

$$= \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}(2\pi S_i)^{r_i}(2\pi S_0 + L_0 L_i)^{m_i - r_i} \cdot \left\{L_0 + \sum_{h=1}^{s}\left[r_h (S_h)^{-1} S_0 L_h + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2(m_h - r_h)(2\pi S_0 + L_0 L_h)^{-1}\pi S_0 L_h\right]\right\}$$

unde $\left(L^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\right)_0$ reprezintă lungimea frontierei configurației geometrice $\bigcup_i \left(T_i K_0 \cap \tilde{K}^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\right)$.

Din (5.3) și (5.5) se obține valoarea medie:

$$E\left[\left(L^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\right)_0\right] = \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}\left(\frac{S_i}{\sigma_0}\right)^{r_i}\left(\frac{2\pi S_0 + L_0 L_i}{2\pi\sigma_0}\right)^{m_i - r_i} \times \tag{5.6}$$

$$\times\left[L_0 + \sum_{h=1}^{s} r_h (S_h)^{-1} S_0 L_h + 2(m_h - r_h)(2\pi S_0 + L_0 L_h)^{-1}\pi S_0 L_h\right]$$

3) Pentru

$$f(K_1 \cap K_0, K_2 \cap K_0, \dots, K_m \cap K_0) = N^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}$$

Scanned with OKEN Scanner

din (1.34), (5.3) și (1.33) se obține formula integrală :

(5.7)

$$E\left[\left(N_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}\right)_0\right]=\prod_{t=1}^{s}\binom{m_t}{r_t}\left(\frac{S_t}{\sigma_0}\right)^{r_t}\left(\frac{2\pi S_0+L_0L_t}{2\pi\sigma_0}\right)^{m_t-r_t}\cdot\left\{\left\{1+\sum_{i=1}^{s}\{[(m_i-r_i)A_i^{-1}+\right.\right.$$

$$+r_i(2\pi S_i)^{-1}]2\pi S_0+\pi S_0L_i^2[r_i(r_i-1)(2\pi S_i)^{-2}+(m_i-r_i)(m_i-r_i-1)A_i^{-2}+$$

$$+r_i(m_i-r_i)(\pi S_i)^{-1}A_i^{-1}]+r_iL_0L_i(2\pi S_i)^{-1}+L_0L_i(m_i-r_i)A_i^{-1}\}+$$

$$\left.\left.+\sum_{i\neq j}^{s}[r_ir_j(S_i)^{-1}(S_j\pi)^{-1}+r_i(m_j-r_j)(S_i)^{-1}A_i^{-1}+\pi(m_i-r_i)(m_j-r_j)A_i^{-1}A_j^{-1}]S_0L_iL_j\right\}\right\}$$

unde $\left(N_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}\right)_0$ reprezintă numărul de domenii simplu conexe din care este formată configurația geometrică $\bigcup_i\left(TK_0\cap\tilde{K}_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}\right)$

4) Presupunînd că figura convexă K_0, coincide cu celula fundamentală α_0 a cărei lungime a frontierei ∂K_0 este l_0, notînd :

(5.8)
$$B_i=2\pi\sigma_0+l_0L_i$$

formula (5.7) devine :

(5.9)

$$E\left[\left(N_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}\right)_0\right]=\prod_{t=1}^{s}\binom{m_t}{r_t}\left(\frac{S_t}{\sigma_0}\right)^{r_t}\left(1+\frac{l_0L_t}{2\pi\sigma_0}\right)^{m_t-r_t}\cdot\left\{\left\{1+\sum_{i=1}^{s}\{[(m_i-r_i)B_i^{-1}+\right.\right.$$

$$+r_i(2\pi S_i)^{-1}]2\pi\sigma_0+\pi\sigma_0L_i^2[r_i(r_i-1)(2\pi S_i)^{-2}+(m_i-r_i)(m_i-r_i-1)B_i^{-2}+$$

$$+r_i(m_i-r_i)(\pi S_i)^{-1}B_i^{-1}]+r_il_0L_i(2\pi S_i)^{-1}+l_0L_i(m_i-r_i)B_i^{-1}\}+$$

$$+\sum_{i\neq j}^{s}[r_ir_j(S_i)^{-1}\cdot(\pi S_j)^{-1}+r_i(m_j-r_j)S_i^{-1}B_i^{-1}+$$

$$\left.\left.+\pi(m_i-r_i)(m_j-r_j)B_i^{-1}B_j^{-1}]L_iL_j\sigma_0\right\}\right\}$$

unde $E\left[\left(N_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}\right)_0\right]$ reprezintă numărul de regiuni în care este împărțită configurația $\tilde{K}_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}$ de către rețea.

Se poate deci enunța proprietatea :

Teorema 5.2. *Fie în planul euclidian o rețea regulată a cărei celulă fundamentală are lungimea frontierei l_0 și aria σ_0. Atunci fiind dat sistemul de figuri convexe $K_1, K_2, \dots, K_m$, de poziție aleatoare în raport cu măsura (5.2'), independente (ca poziție), configurația geometrică $\tilde{K}_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}$ poate fi acoperită cu $N\leqslant E\left[\left(N_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}\right)_0\right]$ celule ale rețelei, unde $E\left[\left(N_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}\right)_0\right]$ are expresia (5.9).*

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 5

APLICAȚII ALE GEOMETRIEI INTEGRALE ÎN SPAȚIILE EUCLIDIENE R_3 ȘI R_n

§ 5.1. FORMULE INTEGRALE PENTRU MULȚIMI CONVEXE ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN R_n

1) În spațiul euclidian cu k dimensiuni R_k se cunosc următoarele formule integrale [83]:

$$(1.1)\quad \overline{W}_\mu(A_0, A_1 \ldots, A_n) = \left(\frac{C_k}{\omega_k}\right)^n \sum_{\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n}^{\mu} K(\lambda_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_n, \mu) \prod_{i=0}^{n} W_{\lambda_i}(A_i)$$

unde

$$(1.2)\quad K(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) = \binom{\mu}{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n} \frac{\omega_\mu}{\omega_{k-\mu}} \prod_{i=0}^{n} \frac{\omega_{k-\lambda_i}}{\omega_{\lambda_i}}$$

$$(1.3)\quad \binom{\mu}{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n} = \frac{\mu!}{\lambda_0!\lambda_1!\ldots\lambda_n!}\ ;\ \left(\mu, \lambda_i \geqslant 0, \text{întregi};\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mu\right)$$

$$(1.4)\quad C_k = \frac{k!\,\omega_1\omega_2\ldots\omega_k}{2}$$

$$(1.5)\quad \omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right)},\ \text{fiind volumul sferei unitate cu } k \text{ dimensiuni.}$$

De asemenea avem:

$$(1.6)\quad C_{ik} = \binom{k}{i} \frac{\omega_{k-1}\,\omega_{k-2}\ldots\omega_{k-i}}{\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_i}\ ;\ i = 1, 2, \ldots, k;\ k = 1, 2, \ldots$$

$$(1.7)\quad C_{0k} = 1$$

$$(1.8)\quad W_i(A) = C_{ik}^{-1} \int \chi(E_i \cap A)\, dE_i\ ;\ (i = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

$$(1.9)\quad W_k(A) = \omega_k \chi(A)$$

unde E_i este un plan i dimensional în spațiul euclidian R_k, $\chi(A)$ caracteristica lui Euler-Poincaré; integrarea se face pentru pozițiile posibile ale lui E care intersectează pe A.

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, pentru $k = 3$:

$$(1.10)\quad \begin{cases} W_0(A) = V(A), \text{ volumul corpului } A \\ 3W_1(A) = F(A), \text{ aria suprafeței corpului respectiv} \\ 3W_2(A) = M(A), \text{ integrala curburii medii} \\ W_3(A) = \omega_3 \chi(A) \end{cases}$$

În spațiul cu k dimensiuni

$$(1.11)\quad \begin{aligned} &W_0(A) = V(A), \text{ volumul corpului } A \\ &kW_1(A) = F(A), \text{ aria suprafeței corpului respectiv} \\ &kW_{k-1}(A) = N(A), \text{ norma lui } A. \end{aligned}$$

În formula (1.1)

$$(1.12)\quad \overline{W}_\mu(A_0, A_1, \ldots, A_n) = \int \ldots \int W_\mu(A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n)\, dA_1 \wedge \ldots \wedge dA_n$$

$$\mu = 0, 1, \ldots, k; \; n = 1, 2, \ldots$$

dA_i fiind măsura cinematică elementară din spațiul cu k dimensiuni.

Formula (1.1) este o generalizare a formulei

$$(1.13)\quad \overline{W}_\mu(A_0, A_1) = \int W_\mu(A_0, A_1)\, dA_1 =$$

$$= \frac{C_k}{\omega_k} \sum_{\lambda=0}^{\mu} D_{\lambda,\mu}\, W_{\mu-\lambda}(A_0) W_\lambda(A_1)$$

unde:

$$(1.14)\quad D_{\lambda,\mu} = \binom{\mu}{\lambda} \frac{\omega_{k-\lambda}\omega_{k+\lambda-\mu}\,\omega_\mu}{\omega_\lambda\,\omega_{k-\mu}\,\omega_{\mu-\lambda}}; \; \mu = 0, 1, 2, \ldots, k$$

Din (1.1), (1.9), (1.12) pentru $\mu = k$ rezultă formula integrală:

$$(1.15)\quad \overline{W}_k(A_0, A_1, \ldots, A_n) = \int \ldots \int \omega_k \chi(A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n) dA_1 \wedge \ldots \wedge dA_n =$$

$$= \left(\frac{C_k}{\omega_k}\right)^n \sum_{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n}^{k} K(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n; k) \prod_{i=0}^{n} W_{\lambda_i}(A_i)$$

2) Fie $K_{m_h}^h$, $(h = 1, 2, \ldots, s)$ s familii de corpuri convexe, în spațiul euclidian R_n, independente [45], aleatoare ca poziție în raport cu măsura cinematică din acest spațiu, care intersectează un corp convex de poziție fixă K_0 și $K_{m_1 m_2 \ldots m_s}^{r_1 r_2 \ldots r_s}$ configurația geometrică formată cu punctele comune pentru $r_1, r_2, \ldots, r_s$ din cele $m_1, m_2, \ldots, m_s$ corpuri convexe, corpurile din familia m_i fiind egale între ele; $(i = 1, 2, \ldots, s; r_h \leqslant m_h; m_1 + m_2 + \ldots + m_s = m)$ numerele $m_1, m_2, \ldots, m_s; r_1, r_2, \ldots, r_s$, fiind precizate.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă numărul domeniilor simplu conexe din configuraţia geometrică $K_0 \cap K^{r_1 \dots r_s}_{m_1 \dots m_s}$ este $N^{r_1 \dots r_s}_{m_1 \dots m_s}$, vrem să calculăm integrala:

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset,\, K_2 \cap K_0 \neq \emptyset, \dots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} N^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s} \, dK_1 \wedge dK_2 \wedge \dots \wedge dK_m \tag{1.16}$$

unde s-a notat aici cu dK măsura cinematică elementară din R_n.

Intersecţia corpurilor convexe $K_1, K_2, \dots, K_m$ conduce la corpuri convexe, deci:

$$N^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s} = \chi\left(K_0 \cap K^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}\right)$$

unde χ reprezintă caracteristica lui Euler-Poincaré pentru configuraţia geometrică respectivă.

Ţinînd seamă de contribuţia fiecărui corp convex la frontiera mulţimii respective, integrala (1.16) va rezulta dintr-o sumă de integrale.

Corpul convex fix, K_0, contribuie la frontiera $\partial\left(K_0 \cap K^{r_1 \dots r_s}_{m_1 \dots m_s}\right)$ cu partea $\partial K_0 \cap D\left(K_0 \cap K^{r_1 \dots r_s}_{m_1 \dots m_s}\right)$, adică cu porţiunea din ∂K_0, cu care K_0 contribuie la frontiera respectivă (D reprezintă domeniul).

Dar [35], (*noi considerăm spaţiul euclidian* R_n):

$$\int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} \chi(\partial K_0 \cap K)\, dK = C_n W_0(K)\chi(K_0) = C_n V(K) \tag{1.17}$$

pentru că $\chi(K_0) = 1$, K_0 fiind corp convex şi

$$C_n = \frac{n!}{2}\omega_1\omega_2 \dots \omega_n \tag{1.18}$$

Ţinînd seamă de (1.17) şi de problema propusă, rezultă

$$\int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \dots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \chi\left[\partial K_0 \cap D\left(K_0 \cap K^{r_1 \dots r_s}_{m_1 \dots m_s}\right)\right] dK_1 \wedge dK_2 \wedge \dots \wedge dK_m =$$

$$= \prod_{h=1}^{s} \binom{m_h}{r_h} (C_n V_n)^{r_h} \left[\frac{C_n}{\omega_n^2} \sum_{\lambda=1}^{n} D_{\lambda,n} W_{n-\lambda}(K_0) W_\lambda(K_h)\right]^{m_h - r_h} \tag{1.19}$$

Considerăm din cele $m = m_1 + m_2 + \dots + m_s$ corpuri convexe date, q corpuri oarecare $K_{h_1}, K_{h_2}, \dots, K_{h_q}$ şi caracteristicile Euler-Poincaré corespunzătoare:

$$\chi(\partial K_{h_1} \cap \partial K_{h_2} \cap \dots \cap \partial K_{h_q}) \text{ sau } \chi(\partial K_0 \cap \partial K_{h_1} \cap \dots \cap \partial K_{h_q})$$

unde q poate lua valori de la unu la n.

Vom calcula integralele corespunzătoare pentru cazul cînd, din cele m_i corpuri din familia $K^i_{m_i}$, se consideră j_i corpuri ($j_i \leqslant m_i$), iar dintre acestea se presupune că t_i mărginesc partea respectivă din $K_0 \cap K^{r_1 \dots r_s}_{m_1 \dots m_s}$ către exteriorul acestor corpuri, $i = 1, 2, \dots, s$ iar $t_i = 0, 1, 2, \dots, j_i$; $\sum_{i=1}^{s} j_i = q$; $q = 1, 2, \dots, n (m \geqslant n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seamă de cele de mai sus, urmează:

$$(1.20)\qquad \int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} \chi(\partial K_{h_1}\cap\partial K_{h_2}\cap\ldots\cap\partial K_{h_q})\,dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m =$$

$$= (C_nV_0)\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{C_n}{\omega_n}\right)^{q-1}\cdot\prod_{i=1}^{s}\binom{m_i-j_i}{m_i-j_i+t_i}(C_nV_i)^{r_i-j_i+t_i}\cdot$$

$$\cdot\left[C_n\omega_n^{-2}\sum_{\lambda=1}^{n}D_{\lambda,n}W_{n-\lambda}(K_0)W_\lambda(K^i)\right]^{m_i-r_i-t_i}\cdot\sum_{\lambda_1^1,\ldots,\lambda_{j_1}^1,\ldots,\lambda_1^s,\ldots,\lambda_{j_s}^s}\tilde{K}(\lambda_1^1,\ldots,$$

$$\ldots\lambda_{j_1}^1,\ldots,\lambda_{j_s}^s)W_{\lambda_1^1}(K_1^1)\ldots W_{\lambda_{j_1}^1}(K_{j_1}^1)\ldots W_{\lambda_1^s}(K_1^s)\ldots W_{\lambda_{j_s}^s}(K_{j_s}^s),$$

unde:

K^i este un corp convex din familia $i(i=1,2,\ldots,s)$, $1\leqslant\lambda_p^i\leqslant n$; λ_p^i întregi, iar pentru i dat $p=1,2,\ldots,j_i$; $i=1,2,\ldots,s$; $\Sigma\lambda_p^i=n$; $\sum_{i=1}^{s}j_i=q$; q dat în (1.20), dar q poate lua valorile $1,2,\ldots,n$.

Tot în egalitatea (1.20) avem:

$$\tilde{K}(\lambda_1^1,\ldots,\lambda_{j_1}^1,\ldots,\lambda_1^s,\ldots,\lambda_{j_s}^s)=\frac{n!}{\lambda_1^1!\ldots\lambda_{j_1}^1!\ldots\lambda_1^s!\ldots\lambda_{j_s}^s!}\cdot\frac{\omega_n}{\omega_0}\cdot$$

$$\cdot\frac{\omega_{n-\lambda_1^1}}{\omega_{\lambda_1^1}}\ldots\frac{\omega_{n-\lambda_{j_1}^1}}{\omega_{\lambda_{j_1}^1}}\ldots\frac{\omega_{n-\lambda_1^s}}{\omega_{\lambda_1^s}}\ldots\frac{\omega_{n-\lambda_{j_s}^s}}{\omega_{\lambda_{j_s}^s}}\cdot$$

Dacă unul dintre corpuri este K_0, de exemplu K_{h_q}, atunci avem rezultatul:

$$(1.21)\qquad \int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} \chi(\partial K_0\cap\partial K_{h_1}\cap\ldots\cap\partial K_{h_{q-1}})\,dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m =$$

$$= \omega_n^{-1}\left(\frac{C_n}{\omega_n}\right)^{q-1}\prod_{i=1}^{s}\binom{m_i-j_i}{r_i-j_i+t_i}(C_nV_i)^{r_i-j_i+t_i}\cdot$$

$$\cdot\left[C_n\omega_n^{-2}\sum_{\lambda=1}^{n}D_{\lambda,n}W_{n-\lambda}(K_0)W_\lambda(K^i)\right]^{m_i-r_i-t_i}\sum_{\lambda_0,\lambda_1^1,\ldots,\lambda_{j_1}^1,\ldots,\lambda_1^s;\ldots;\lambda_{j_s}^s}\tilde{K}(\lambda_0,\lambda_1^1;\ldots$$

$$\lambda_{j_1}^1;\ldots;\lambda_1^s,\ldots,\lambda_{j_s}^s)\cdot W_{\lambda_0}(K_0)W_{\lambda_1}(K_1^1)\ldots W_{\lambda_{j_1}^1}(K_{j_1}^1)\ldots W_{\lambda_1^s}(K_1^s)\ldots W_{\lambda_{j_s}^s}(K_{j_s}^s),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde:

$1 \leqslant \lambda_0 \leqslant n$; $1 \leqslant \lambda_p^i \leqslant n$; λ_p^i întregi, pentru i dat $p = 1, 2, \ldots, j_i$; $i = 1, 2, \ldots, s$; $\lambda_0 + \Sigma\lambda_p^i = n$;

$$\sum_{i=1}^{s} j_i = q - 1;\ q = 1, 2, \ldots, n.$$

Folosim notaţiile:

$$\Omega^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}(t_1, t_2, \ldots, t_s;\ j_1, j_2, \ldots, j_s;\ q) = \frac{C_n W_0(K_0)}{\omega_n}\left(\frac{C_n}{\omega_n}\right)^{q-1}.$$

(1.22)
$$\prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{j_i}\binom{j_i}{t_i}\binom{m_i - j_i}{r_i - j_i + t_i}(C_n W_0(K_i))^{r_i - j_i + t_i}\cdot$$
$$\cdot\left[C_n\omega_n^{-2}\sum_{\lambda=1}^{n} D_{\lambda,n} W_{n-\lambda}(K_0) W_\lambda(K_i)\right]^{m_i - r_i - t_i}\cdot$$
$$\cdot\sum_{\lambda_1^1, \ldots, \lambda_{j_1}^1; \ldots; \lambda_1^s, \ldots, \lambda_{j_s}^s} \tilde{K}(\lambda_1^1, \ldots, \lambda_{j_1}^1; \ldots;\ \lambda_1^s \ldots, \lambda_{j_s}^s) W_{\lambda_1^1}(K_1^1) \ldots W_{j_1}^1(K_{j_1}^1) \ldots$$
$$\ldots W_{\lambda_1^s}(K_1^s) \ldots W_{\lambda_{j_s}^s}(K_{j_s}^s),$$

unde λ_p^i numere naturale, $1 \leqslant \lambda_p^i \leqslant n$; pentru i dat

$$p = 1, 2, \ldots, j_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, s;\ \Sigma\lambda_p^i = n;\ \sum_{i=1}^{s} j_i = q;\ q = 1, 2, \ldots, n.$$

De asemenea notăm:

(1.23)
$$\Omega^{*r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}(t_1, t_2, \ldots, t_s;\ j_1, j_2, \ldots, j_s;\ q) =$$
$$= \omega_n^{-1}\left(\frac{C_n}{\omega_n}\right)^{q-1}\prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{j_i}\binom{j_i}{t_i}\binom{m_i - j_i}{r_i - j_i + t_i}(C_n W_0(K_i))^{r_i - j_i + t_i}\times$$
$$\times\left[C_n\omega_n^{-2}\sum_{\lambda=1}^{n} D_{\lambda,n} W_{n-\lambda}(K_0) W_\lambda(K_i)\right]^{m_i - r_i - t_i}\times$$
$$\times\sum_{\lambda_0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{j_1}^1; \ldots; \lambda_1^s, \ldots, \lambda_{j_s}^s} \tilde{K}(\lambda_0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{j_1}^1, \ldots, \lambda_1^s, \ldots, \lambda_{j_s}^s) W_{\lambda_0}(K_0)\times$$
$$\times W_{\lambda_1^1}(K_1^1) \ldots W_{\lambda_{j_1}^1}(K_{j_1}^1) \ldots W_{\lambda_1^s}(K_1^s) \ldots W_{\lambda_{j_s}^s}(K_{j_s}^s),$$

unde λ_p^i întregi; $1 \leqslant \lambda_0 \leqslant n$; λ_0 întreg; $1 \leqslant \lambda_p^i \leqslant n$; pentru i dat $p = 1, 2, \ldots, \ldots, j_i$; $i = 1, 2, \ldots, s$; $\lambda_0 + \Sigma\lambda_p^i = n$;

$$\sum_{i=1}^{s} j_i = q - 1;\ \ q = 1, \ldots, n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1.20), (1.21), (1.22), (1.23) rezultă formula integrală:

$$(1.24)\qquad \int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} N^{r_1r_2\ldots r_s}_{m_1m_2\ldots m_s}\,dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m =$$

$$=\sum_{q=1}^{n}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_s}\sum_{t_1,t_2,\ldots,t_s}\Big[\Omega^{r_1r_2\ldots r_s}_{m_1m_2\ldots m_s}(t_1,\ldots,t_s;\,j_1,\ldots,j_s;\,q)+$$

$$+\,\Omega^{*r_1r_2\ldots r_s}_{m_1m_2\ldots m_s}(t_1,t_2,\ldots,t_s;\,j_1,j_2,\ldots,j_s;\,q)\Big]$$

Observații:

În formulele (1.22), (1.23), coeficienții fără semnificație sînt nuli.

În Ω, $\sum_{i=1}^{s} j_i = q$ iar în Ω^*, $\sum_{i=1}^{s} j_i = q-1$.

Pentru q dat există mai multe sisteme $(j_1, j_2, \ldots, j_s)$; pentru $j_1, j_2, \ldots, j_s$ dați se consideră toate sistemele $(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ unde $0 \leqslant t_i \leqslant j_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$; se calculează sumele respective din Ω, Ω^* pentru toate produsele posibile, ținîndu-se seama de condițiile precedente.

3) Dacă se notează prin

$$W^{r_1\ldots r_s}_{\mu m_1\ldots m_s}$$

caracteristica (μ) a configurației geometrice $K_0\cap K^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}$ din spațiul euclidian cu n dimensiuni, urmează a se calcula integrala

$$\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} W^{r_1\ldots r_s}_{\mu m_1\ldots m_s}\,dK_1\wedge dK_2\wedge\ldots\wedge dK_m$$

De exemplu, dacă

$$\alpha)\ \mu = n;\ W^{r_1\ldots r_s}_{n m_1\ldots m_s} = \omega_n\chi(K_0, K_1, \ldots, K_m)$$

unde χ este caracteristica lui Euler — Poincaré, pentru configurația geometrică $K_0\cap K^{r_1r_2\ldots r_s}_{m_1m_2\ldots m_s}$

$$\beta)\ \mu = 1;\ W^{r_1r_2\ldots r_s}_{1 m_1m_2\ldots m_s} = S(K_0, K_1, \ldots, K_m),\ \text{unde}$$

$S(K_0, K_1, \ldots, K_m)$ reprezintă aria frontierei configurației geometrice respective.

$$\gamma)\ \mu = 0;\ W^{r_1r_2\ldots r_s}_{0 m_1m_2\ldots m_s} = V(K_0, K_1, \ldots, K_m)$$

adică volumul respectiv.

Din formula (1.13), pentru $A_0 = K_0$, $A_1 = K$ și $\mu = n$ rezultă:

$$(1.25)\qquad \int_{\{K\cap K_0\neq\emptyset\}} W_n(K_0\cap K)\,dK = \frac{C_n}{\omega_n}\sum_{\lambda=0}^{n} D_{\lambda,n}\,W_{n-\lambda}(K_0)\,W_\lambda(K)$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$W_n(K_0 \cap K) = \omega_n \chi(K_0 \cap K) = \omega_n$$

K_0 şi K fiind presupuse corpuri convexe, urmează :

$$\int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK = \frac{C_n}{\omega_n^2} \sum_{\lambda=0}^{n} D_{\lambda,n} W_{n-\lambda}(K_0) W_\lambda(K) \tag{1.26}$$

Dacă K_0 devine un punct P, atunci

$W_n(K_0) = \omega_n$; $W_i(K_0) = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$ şi (1.26) se scrie :

$$\int_{(K \ni P)} dK = \frac{C_n}{\omega_n^2} D_{0,n} W_n(K_0) W_0(K) = C_n W_0(K) \; ; \; (D_{0,n} = \omega_n) \tag{1.27}$$

Integrala (1.26) este calculată pentru poziţiile lui K care conţin un punct fix P interior lui K_0 şi pentru poziţiile figurii convexe K care nu conţine punctul P, deci :

$$\int_{\{K \not\ni P, K \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK = \frac{C_n}{\omega_n^2} \sum_{\lambda=1}^{n} D_{\lambda,n} W_{n-\lambda}(K_0) W_n(K). \tag{1.28}$$

Din (1.20), (1.21), (1.22), (1.23), (1.27), (1.28) rezultă *pentru caracteristica geometrică* μ :

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu m_1 \ldots m_s}^{r_1 \ldots r_s}(t_1, t_2, \ldots, t_s ; j_1, j_2, \ldots, j_s, q) &= C_n W_0(K_0) \left(\frac{C_n}{\omega_n}\right)^{q-1} \cdot \\ \cdot \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{j_i} \binom{j_i}{t_i} \binom{m_i - j_i}{r_i - j_i + t_i} &(C_n W_0(K_i))^{r_i - j_i + t_i} \cdot \\ \cdot \left[\frac{C_n}{\omega_n^2} \sum_{\lambda=1}^{n} D_{\lambda,n} W_{n-\lambda}(K_0)\, W_\lambda(K^i)\right]^{m_i - r_i - t_i} &\cdot \\ \cdot \sum_{\lambda_1^1, \ldots, \lambda_{j_1}^1 ; \ldots ; \lambda_1^s, \ldots, \lambda_{j_s}^s} \tilde{K}_\mu(\lambda_1^1, \ldots, \lambda_{j_1}^1 ; \ldots ; \lambda_1^s, \ldots, \lambda_{j_s}^s) &\cdot \\ \cdot W_{\lambda_1^1}(K_1^1) \ldots W_{\lambda_{j_1}^1}(K_{j_1}^1) \ldots W_{\lambda_1^s}(K_1^s) \ldots W_{\lambda_{j_s}^s}(K_{j_s}^s), & \end{aligned} \tag{1.29}$$

unde

$$1 \leqslant \lambda_p^i \leqslant \mu \; ; \; p = 1, 2, \ldots, j_i \; ; \; i = 1, 2, \ldots, s \; ;$$

$$\Sigma \lambda_i^p = \mu \; ; \; \sum_{i=1}^{s} j_i = q \; ; \; q = 1, 2, \ldots, \mu$$

$$\tilde{K}_\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j) = \frac{\mu!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_j!} \frac{\omega_\mu}{\omega_{n-\mu}} \prod_{i=1}^{j} \frac{\omega_{n-\lambda_i}}{\omega_{\lambda_i}} \; ; \; \sum_{i=1}^{j} \lambda_i = \mu.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem de asemenea

$$\Omega^{*r_1\dots r_s}_{\mu m_1\dots m_s}(t_1, t_2, \dots, t_s; j_1, j_2, \dots, j_s; q) = \left(\frac{C_n}{\omega_n}\right)^{q-1} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{j_i}\binom{j_i}{t_i}\binom{m_i - j_i}{r_i - j_i + t_i}(C_n W_0(K_i))^{r_i - j_i + t_i} \times$$

$$\times \left[\frac{C_n}{\omega_n^2}\sum_{\lambda=1}^{n} D_{\lambda,n} W_{n-\lambda}(K_0) W_\lambda(K^i)\right]^{m_i - r_i - t_i} \times$$

$$\times \sum_{\lambda_0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{j_1}^1, \dots, \lambda_1^s, \dots, \lambda_{j_s}^s} \tilde{K}_\mu(\lambda_0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{j_1}^1, \dots, \lambda_1^s, \dots, \lambda_{j_s}^s) \times$$

$$\times W_{\lambda_0}(K_0) W_{\lambda_1^1}(K_1^1) \dots W_{\lambda_{j_1}^1}(K_{j_1}^1) \dots W_{\lambda_1^s}(K_1^s) \dots W_{\lambda_{j_s}^s}(K_{j_s}^s)$$

unde

$$1 \leqslant \lambda_0 \leqslant \mu; \quad 1 \leqslant \lambda_p^i \leqslant \mu; \text{ pentru } i \text{ dat } p = 1, 2, \dots, j_i;$$

$$\lambda_0 + \Sigma\lambda_p^i = \mu; \sum_{i=1}^{s} j_i = q - 1; \quad q = 1, 2, \dots, \mu;$$

$$t_i, \ j_i \text{ întregi}; \ 0 \leqslant t_i \leqslant j_i; \ 0 \leqslant j_i \leqslant m_i; \ i = 1, 2, \dots, s.$$

Le fel ca în (1.24) din (1.29) și (1.30) rezultă formula generală:

$$(1.31) \qquad \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \dots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} W^{r_1\dots r_s}_{\mu m_1\dots m_s} \, dK_1 \wedge \dots \wedge dK_m =$$

$$= \sum_{q=1}^{\mu} \sum_{j_1,\dots,j_s} \sum_{t_1,\dots,t_s} \left[\Omega^{r_1\dots r_s}_{\mu m_1\dots m_s}(t_1, \dots, t_s; j_1, \dots, j_s; q) + \right.$$

$$\left. + \Omega^{*r_1\dots r_s}_{\mu m_1\dots m_s}(t_1, \dots, t_s; j_1, \dots, j_s, q)\right].$$

Din formula generală (1.31) rezultă:

a) Formula dată de Franz Streit în [83], dacă $r_i = m_i = 1$; $i = 1, 2, \dots, s$.

b) Dacă $\mu = n$, formula (1.24) multiplicată prin ω_n, deoarece $W_n(K) = \omega_n \chi(K)$.

c) Dacă $s = 1$; $m_1 = m$; $r_1 = r$ rezultă formula integrală [37]:

$$(1.32) \qquad \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \dots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} W^r_{\mu m} \, dK_1 \wedge \dots \wedge dK_m = C_n W_0(K_0) \sum_{s=1}^{\mu} \binom{m}{s}\left(\frac{C_n}{\omega_n}\right)^{s-1} \times$$

$$\times \left[\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_s}^{\mu} \tilde{K}^*(\lambda_1, \dots, \lambda_s; \mu) \prod_{i=1}^{s} W_{\lambda_i}(K_i)\right] \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t}\binom{m-s}{r-s+t}[C_n W_0(K)]^{r-s+t} \times$$

$$\times \left[C_n \omega_n^{-2} \sum_{\lambda=1}^{n} D_{\lambda,n} W_{n-\lambda}(K_0) W_\lambda(K)\right]^{m-r-t} +$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\sum_{s=1}^{\mu}\binom{m}{s-1}\left(\frac{C_n}{\omega_n}\right)^{s-1}\left[\sum_{\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{s-1}}^{\mu}\tilde{K}^*(\lambda_0,\ldots,\lambda_{s-1};\mu)\prod_{i=0}^{s-1}W_{\lambda_i}(K_i)\right]\times$$

$$\times\sum_{t=0}^{s-1}\binom{s-1}{t}\binom{m-s+1}{r-s+t+1}\cdot[C_nW_0(K)]^{r-s+t+1}\times$$

$$\times\left[C_n\omega_n^{-2}\sum_{\lambda=1}^{n}D_{\lambda,n}W_{n-\lambda}(K_0)W_\lambda(K)\right]^{m-r-t}$$

unde

$$\tilde{K}^*(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t;\mu)=\binom{\mu}{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t}\frac{\omega_\mu}{\omega_{n-\mu}}\prod_{i=1}^{t}\frac{\omega_{n-\lambda_i}}{\omega_{\lambda_i}};$$

$$\sum_{i=1}^{t}\lambda_i=\mu;\quad 1\leqslant\lambda_i\leqslant\mu.$$

În formula (1.32) coeficienţii fără semnificaţie sînt nuli; $\binom{m}{n}=1$ şi dacă $m=n=0$; pentru fiecare valoare a lui s, se face suma mai întîi în raport cu t $(t=0,1,\ldots,s)$.

d) Din formula integrală (1.32) rezultă pentru $\mu=n$, formula integrală:

$$(1.33)\qquad \int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} N_m^r\,dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m=(C_nV_0)\sum_{s=1}^{n}\binom{m}{s}\left(\frac{C_n}{\omega_n}\right)^{s-1}\omega_n^{-1}\times$$

$$\times\left[\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_s}^{n}\tilde{K}(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)\prod_{i=1}^{s}W_i(K_i)\right]\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\binom{m-r}{r-s+t}\times$$

$$\times(C_nV)^{r-s+t}\cdot\left[C_n\omega_n^{-2}\sum_{\lambda=1}^{n}D_{\lambda,n}W_{n-\lambda}(K_0)W_\lambda(K)\right]^{m-r-t}+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\binom{m}{s-1}\omega_n^{-1}\left(\frac{C_n}{\omega_n}\right)^{s-1}\left[\sum_{\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{s-1}}^{n}\tilde{K}(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{s-1})\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i=0}^{s-1}W_{\lambda_i}(K_i)\right]\cdot\sum_{t=0}^{s-1}\binom{s-1}{t}\binom{m-s+1}{r-s+t+1}(C_nV)^{r-s+t+1}\times$$

$$\times\left[C_n\omega_n^{-2}\sum_{\lambda=1}^{n}D_{\lambda,n}W_{n-\lambda}(K_0)W_\lambda(K)\right]^{m-r-t},$$

unde în (1.32) s-a împărţit cu ω_n, deoarece $W_n(K)=\omega_n\chi(K)$.

e) Dacă $r=m$, din (1.32) rezultă formula lui Franz Streit pentru figuri convexe egale [83].

f) Dacă $n=2$ şi $\mu=0$ în (1.31) rezultă formula (1.3) cap. IV.

g) Dacă $n=2$ şi $\mu=1$ în (1.31), se obţine formula (1.12) cap. IV.

h) Din (1.31) pentru $n=\mu=2$ se obţine formula integrală (1.34) cap. IV.

Scanned with OKEN Scanner

i) Pentru $n = 2$ şi $\mu = 0$ din (1.32) rezultă formula integrală (1.5') cap IV, dacă se împarte cu $[2\pi(S_0 + S) + L_0 L]^m$.
j) Dacă $n = 2$ şi $\mu = 1$ în (1.32) se obţine formula (1.11').
k) Pentru $n = 2$, $\mu = 2$ în (1.32) rezultă (1.34'), cap. IV, dacă se împarte cu $[2\pi(S_0 + S) + L_0 L]^m$.

§5.2. FORMULE INTEGRALE ÎN SPAŢIUL EUCLIDIAN R_3

1) Dacă în formula integrală (1.31) se consideră $n = 3$ şi $\mu = 0$ se obţine formula integrală [22]:

$$(2.1)\qquad \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} V^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}\, dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m =$$

$$= V_0 \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} (8\pi^2 V_i)^{r_i} \cdot [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0 \bar{H}_i + S_i \bar{H}_0)]^{m_i - r_i}$$

unde $V^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}$ reprezintă volumul configuraţiei geometrice $K_0 \cap K^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}$, V_i volumul corpului convex K_i, S_i aria frontierei ∂K_i şi $\bar{H}_i$ integrala curburii medii respective.

Se ştie că măsura elementară cinematică în spaţiul euclidian R_3 are expresia:

$$(2.2)\qquad dK = dP \wedge d\Omega \wedge d\psi$$

unde $dP = dx \wedge dy \wedge dz$, $d\Omega = |\sin\theta|\, d\theta \wedge d\varphi$, ψ fiind un unghi de rotaţie.

Fiind date corpurile convexe K şi K_0, formulele (1.27), (1.28) se scriu:

$$(2.3)\qquad \int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset, P \in K\}} dK = 8\pi^2 V$$

$$(2.4)\qquad \int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset, P \notin K\}} dK = 8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0 \bar{H} + S \bar{H}_0)$$

Formula corespunzătoare lui (1.26) se scrie în R_3:

$$(2.5)\qquad \int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK = 8\pi^2 (V + V_0) + 2\pi(S_0 \bar{H} + S \bar{H}_0)$$

Ţinînd seamă că, corpurile convexe $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sînt independente, urmează:

$$(2.6)\qquad \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m =$$

$$= \prod_{i=1}^{s} [8\pi^2 (V_0 + V_i) + 2\pi(S_0 \bar{H}_i + S_i \bar{H}_0)]^{m_i}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (2.1) şi (2.6) urmează valoarea medie:

$$E\left(V_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}\right)=V_0\prod_{i=1}^{s}\frac{\binom{m_i}{r_i}(8\pi^2V_i)^{r_i}\left[8\pi^2V_0+2\pi(S_0\bar{H}_i+S_i\bar{H}_0)\right]^{m_i-r_i}}{\left[8\pi^2(V_0+V_i)+2\pi(S_0\bar{H}_i+S_i\bar{H}_0)\right]^{m_i}}.$$

2) Din formula integrală (1.31) pentru $n=3$ şi $\mu=1$ rezultă formula integrală:

$$\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\dots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}}\sigma_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}\,dK_1\wedge\dots\wedge dK_m=\prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}(8\pi^2V_i)^{r_i}\left[8\pi^2V_0+\right.$$

$$+2\pi(S_i\bar{H}_0+S_0\bar{H}_i)\Big]^{m_i-r_i}\left\{S_0+\sum_{h=1}^{s}r_h(V_h)^{-1}V_0S_h+\right. \tag{2.8}$$

$$\left.+8\pi^2V_0(m_h-r_h)S_h\left[8\pi^2V_0+2\pi(S_0\bar{H}_h+S_h\bar{H}_0)\right]^{-1}\right\},$$

unde $\sigma_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}$ reprezintă aria frontierei configuraţiei geometrice $K_0\cap K_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}$.

Din (2.8) şi (2.6) urmează valoarea medie:

$$E\left(\sigma_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}\right)=\prod_{i=1}^{s}\frac{\binom{m_i}{r_i}(8\pi^2V_i)^{r_i}\left[8\pi^2V_0+2\pi(S_i\bar{H}_0+S_0\bar{H}_i)\right]^{m_i-r_i}}{\left[8\pi^2(V_0+V_i)+2\pi(S_i\bar{H}_0+S_0\bar{H}_i)\right]^{m_i}}\cdot \tag{2.9}$$

$$\cdot\left\{S_0+\sum_{h=1}^{s}r_h(V_h)^{-1}V_0S_h+8\pi^2V_0(m_h-r_h)S_h\left[8\pi^2V_0+2\pi(S_0\bar{H}_h+S_h\bar{H}_0\right]^{-1}\right\}.$$

Dacă presupunem

(2.10) $m_i\,V_i=k_i$ ($k_i=$ constante, $i=1,2,\dots,s$) atunci din (2.7) rezultă:

(2.11)

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty\\ \dots\\ m_s\to\infty}}E\left(V_{m_1\dots m_s}^{r_1\dots r_s}\right)=V_0\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{r_i!}\left(\frac{4\pi k_i}{4\pi V_0+S_0\bar{H}_i+S_i\bar{H}_0}\right)^{r_i}\cdot\exp\left(-\sum_{i=1}^{s}\frac{4\pi k_i}{4\pi V_0+S_0\bar{H}_i+S_i\bar{H}_0}\right)$$

unde $V_i\to 0$ iar K_i se reduce la porţiunea de suprafaţă cu aria $\frac{S_i}{2}$.

3) Din formula integrală (1.31) pentru $n=3$ şi $\mu=2$ se poate obţine o valoare medie pentru integrala curburii medii respective.

4) Notînd:

$$A_i=8\pi^2V_0+2\pi(S_0\bar{H}_i+S_i\bar{H}_0)$$

Scanned with OKEN Scanner

din (1.24) pentru spațiul euclidian R_3 rezultă formula integrală:

$$(2.12)\qquad \int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} N^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}\,\mathrm{d}K_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}K_m=\prod_{h=1}^{s}\binom{m_h}{r_h}(8\pi^2V_h)^{r_h}A_h^{m_h-r_h}\cdot$$

$$\cdot\Big\{1+\sum_{i=1}^{s}\Big[r_iV_i^{-1}V_0+8\pi^2(m_i-r_i)A_i^{-1}V_0+(8\pi^2)^{-1}r_i(r_i-1)V_i^{-2}(2\pi S_i\bar H_iV_0)+$$

$$+4\pi(m_i-r_i)r_iS_i\bar H_i(A_iV_i)^{-1}V_0+16\pi^3S_i\bar H_i(m_i-r_i)(m_i-r_i-1)A_i^{-2}V_0+$$

$$+2\pi(m_i-r_i)(S_0\bar H_i+S_i\bar H_0)A_i^{-1}+2\pi r_i(S_0\bar H_i+S_i\bar H_0)(8\pi^2V_i)^{-1}+$$

$$+\frac{4}{3}\pi^7(m_i-r_i)(m_i-r_i-1)\cdot(m_i-r_i-2)S_i^3A_i^{-3}V_0+$$

$$+\frac{\pi^5}{2}(8\pi^2)^{-1}r_i(r_i-1)(m_i-r_i)S_i^3V_i^{-2}A_i^{-1}V_0+$$

$$+\frac{\pi^5}{2}r_i(m_i-r_i)(m_i-r_i-1)S_i^3A_i^{-2}V_i^{-1}V_0+$$

$$+\frac{\pi^5}{2}(m_i-r_i)(m_i-r_i-1)S_0S_i^2A_i^{-2}+\frac{\pi^5}{2}r_i(r_i-1)(8\pi^2V_i)^{-2}S_0S_i^2+$$

$$+r_i(m_i-r_i)\pi^5S_0S_i^2(8\pi^2V_iA_i)^{-1}+\frac{(8\pi^2)^{-2}}{3!}r_i(r_i-1)(r_i-2)\pi^5S_i^3V_i^{-3}V_0\Big]+$$

$$+\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2,\ldots,s}}\Big[(8\pi^2)^{-1}r_ir_j(V_iV_j)^{-1}\pi(S_i\bar H_j+S_j\bar H_i)V_0+$$

$$+2\pi r_i(m_j-r_j)(S_i\bar H_j+S_j\bar H_i)(V_iA_j)^{-1}V_0+8\pi^3(m_j-r_j)(S_i\bar H_j+$$

$$+S_j\bar H_i)(A_iA_j)^{-1}V_0+\pi r_ir_j(r_i-1)(8V_i)^{-2}V_j^{-1}S_i^2S_jV_0+$$

$$+8\pi^7(m_i-r_i)(m_i-r_i-1)(m_j-r_j)(S_i^2S_jA_i^{-2}A_j^{-1})+$$

$$+8\pi^3r_i(r_i-1)(m_j-r_j)(8V_i)^{-2}S_i^2S_jA_j^{-1}+$$

$$+\frac{\pi^3}{4}r_ir_j(m_i-r_i)S_i^2S_j(V_iV_jA_i)^{-1}V_0+$$

$$+\pi^5r_j(m_i-r_i)(m_i-r_i-1)S_i^2S_jV_0V_j^{-1}A_i^{-2}+$$

$$+2\pi^5r_i(m_i-r_i)(m_j-r_j)S_i^2S_j(V_iA_iA_j)^{-1}V_0+$$

$$+\frac{\pi^5}{2}(8\pi^2)^{-2}S_0r_ir_jS_iS_j(V_iV_j)^{-1}+$$

$$+\frac{\pi^5}{2}S_0S_iS_j(m_i-r_i)(m_j-r_j)(A_iA_j)^{-1}+$$

$$+\pi^3S_0S_iS_jr_j(m_i-r_i)(8A_iV_j)^{-1}\Big]+$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\sum_{i<j<t}^{1\ldots s}[(8)^{-2}\pi r_i r_j r_t (V_i V_j V_t)^{-1} S_i S_j S_t V_0 +$$
$$+ 8\pi^7 (m_i - r_i)(m_j - r_j)(m_t - r_t) S_i S_j S_t (A_i A_j A_t)^{-1} V_0 +$$
$$+ 3\pi^3 r_i \cdot r_j (m_t - r_t)(8 V_i V_j A_t)^{-1} S_i S_j S_t V_0 +$$
$$+ 3\pi^5 r_t (m_i - r_i)(m_j - r_j) S_i S_j S_t (A_i A_j V_t)^{-1} V_0]\}.$$

Din formula precedentă și din (2.6) rezultă valoarea medie corespunzătoare:

$$E\left(N^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}\right) = \frac{\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} N^{r_1\ldots r_s}_{m_1\ldots m_s}\, dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m}{\prod_{i=1}^{s}[8\pi^2(V_0+V_i)+2\pi(S_0\bar{H}_i+S_i\bar{H}_0)]^{m_i}} \tag{2.13}$$

5) Din formula integrală (1.32) pentru $n=3$ și $\mu=0$ rezultă [76]:

$$\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} V^r_m dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m = \tag{2.14}$$

$$= \binom{m}{r}(8\pi^2 V)^r [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0\bar{H} + S\bar{H}_0)]^{m-r} V_0$$

unde V^r_m reprezintă volumul configurației geometrice $K_0 \cap K^r_m$; K^r_m fiind configurația geometrică cu punctele comune a r din cele m corpuri convexe egale, $K_1, K_2, \ldots, K_m$.

Ținînd seama că în acest caz:

$$\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m = \tag{2.15}$$

$$= [8\pi^2(V_0+V) + 2\pi(S_0\bar{H} + S\bar{H}_0)]^m.$$

din (2.14) și (2.15) se obține valoarea medie corespunzătoare [76]:

$$E(V^r_m) = \frac{\binom{m}{r}(8\pi^2 V)^r [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0\bar{H} + S\bar{H}_0)]^{m-r}}{[8\pi^2(V_0+V) + 2\pi(S_0\bar{H} + S\bar{H}_0)]^m} V_0. \tag{2.16}$$

6) Tot în formula integrală (1.32) pentru $n=3$ și $\mu=1$ se obține [76]:

$$\int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} \sigma^r_m dK_1\wedge\ldots\wedge dK_m = \tag{2.17}$$

$$= \binom{m}{r}(8\pi^2 V)^r [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0\bar{H} + S\bar{H}_0)]^{m-r} \times$$
$$\times [S_0 + rV^{-1}V_0 S + 8\pi^2 V_0 (m-r) S (8\pi^2 V_0 + 2\pi S_0\bar{H} + 2\pi S\bar{H}_0)^{-1}]$$

unde σ^r_m reprezintă aria frontierei configurației $K_0 \cap K^r_m$.

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea medie corespunzătoare are expresia :

$$(2.18)\qquad E(\sigma_m^r) = \frac{\binom{m}{r}(8\pi^2 V)^r [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0)]^{m-r}}{[8\pi^2(V_0 + V) + 2\pi(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0)]^m} \times$$

$$\times\ [S_0 + rV^{-1}V_0 S + 8\pi^2 V_0(m-r)S(8\pi^2 V_0 + 2\pi S_0\overline{H} + 2\pi S\overline{H}_0)^{-1}]$$

7) Din formula (1.32) pentru $n = 3$ şi $\mu = 2$ rezultă următoarea formulă integrală [36] :

$$(2.19)\qquad \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} \overline{H}_m^r \, dK_1 \wedge \ldots \wedge dK_m =$$

$$= 8\pi^2 V_0 m\overline{H}\binom{m-1}{r-1}(8\pi^2 V)^{r-1}A^{m-r} + 8\pi^2 V_0 m\overline{H}\binom{m-1}{r}(8\pi^2 V)^r A^{m-r-1} +$$

$$+ 4\pi^6 V_0 S^2\binom{m}{2}\binom{m-2}{r-2}(8\pi^2 V)^{r-2}A^{m-r} +$$

$$+ 8\pi^6 V_0 S^2\binom{m}{2}\binom{m-2}{r-1}(8\pi^2 V)^{r-1}A^{m-r-1} + 4\pi^6 V_0 S^2\binom{m}{2}\binom{m-2}{r}(8\pi^2 V)^r A^{m-r-2} +$$

$$+ \binom{m}{r}\overline{H}_0(8\pi^2 V)^r A^{m-r} + \frac{m}{2}\pi^4 S_0 S\binom{m-1}{r-1}(8\pi^2 V)^{r-1}A^{m-r} +$$

$$+ \frac{m}{2}\pi^4 S_0 S\binom{m-1}{r}(8\pi^2 V)^r A^{m-r-1},$$

unde s-a notat cu :

$$(2.20)\qquad A = 8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0)$$

iar cu $\overline{H}_m^r$ integrala curburii medii pentru configuraţia $K_0 \cap K_m^r$.

Dacă în (2.19) se împarte cu expresia dată de (2.15), se obţine valoarea medie corespunzătoare.

8) Dacă în (1.32) se consideră $n = 3$ şi $\mu = 3$, se obţine formula :

$$(2.21)\qquad \int_{\{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, K_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} N_m^r \, dK_1 \wedge dK_2 \wedge \ldots \wedge dK_m =$$

$$= \binom{m}{r}(8\pi^2 V)^r A^{m-r}\Big\{1 + [r(8\pi^2 V)^{-1} + (m-r)A^{-1}](8\pi^2 V_0) +$$

$$+ \frac{r(r-1)}{2}(8\pi^2 V)^{-2}(8\pi^2 V_0)4\pi S\overline{H} + r(m-r)(8\pi^2 V_0)4\pi S\overline{H}(8\pi^2 V)^{-1}A^{-1} +$$

$$+ \frac{(m-r)(m-r-1)}{2}(8\pi^2 V_0)(4\pi S\overline{H})A^{-2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(8\pi^2 V_0)\pi^5 S^3(8\pi^2 V)^{-3} +$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\frac{(m-r)(m-r-1)(m-r-2)}{3!}(\pi^5 S^3)A^{-3}(8\pi^2 V_0)+$$

$$+\frac{r(r-1)(m-r)}{2}(8\pi^2 V)^{-2}(8\pi^2 V_0)\pi^5 S^3 A^{-1}+\frac{(m-r)(m-r-1)}{2}A^{-2}\pi^5 S_0 S^2+$$

$$+\frac{r(r-1)}{2}(8\pi^2 V)^{-2}(\pi^5 S_0 S^2)+r(m-r)(8\pi^2 V)^{-1}(\pi^5 S_0 S^2)A^{-1}+$$

$$+r(8\pi^2 V)^{-1}(2\pi S_0 \bar{H}+2\pi S\bar{H}_0)+$$

$$+(m-r)(2\pi S_0\bar{H}+2\pi S\bar{H}_0)A^{-1}+\frac{r(m-r)(m-r-1)}{2}(8\pi^2 V)^{-1}A^{-2}\pi^5 S^3(8\pi^2 V_0)\Big\}.$$

unde N_m^r reprezintă numărul domeniilor simplu conexe din care este formată configurația geometrică $K_0 \cap K_m^r$ [33].

9) Se știe că măsura cinematică elementară din spațiul euclidian R_3 mai poate fi scrisă sub forma [79].

$$dK = d\vec{G} \wedge d\psi \wedge dt \tag{2.22}$$

unde $d\vec{G}$ reprezintă măsura elementară a dreptelor orientate din spațiul R_3, t distanța de la proiecția originei pe dreapta G, pînă la un punct care aparține acestei drepte.

Notînd cu dC măsura cinematică elementară corespunzătoare cilindrilor, avem:

$$dK = dC \wedge dt \tag{2.23}$$

unde t este distanța de la proiecția originii pe axa cilindrului, pînă la un punct al axei.

Din formula cinematică principală dată de Blaschke

$$\int_{\{K\cap K_0\neq\emptyset\}} \chi(K_0\cap K)dK = 8\pi^2[V_0\chi(K)+V\chi(K_0)]+ \tag{2.24}$$

$$+2\pi[S(K_0)\bar{H}(K)+S(K)\bar{H}(K_0)]$$

formula corespunzătoare, pentru cazul cînd C este cilindru de lungime infinită, are expresia [68]:

$$\int_{\{C\cap K_0\neq\emptyset\}} \chi(K_0\cap C)dC = 8\pi^2\sigma\chi(K_0)+2\pi[\pi S(K_0)+2\pi R\bar{H}(K_0)] \tag{2.25}$$

unde $\sigma=\pi R^2$ este aria secțiunii normale a cilindrului C de rază R, dacă acesta este circular.

Dacă $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sînt cilindrii circulari de lungime infinită, notînd cu $V_{m_1\ldots m_s}^{r_1\ldots r_s}$ volumul configurației geometrice corespunzătoare $K_0\cap K_{m_1\ldots m_s}^{r_1\ldots r_s}$, volumul nu va depinde de t_j, unde t_j reprezintă distanța de la proiecția originii pe axa cilindrului K_j pînă la centrul său, care cilindru este considerat la început de lungime finită.

Scanned with OKEN Scanner

Înainte de a face $a_j \to \infty$, în ambii membri ai egalității (2.1) se împarte cu $a_j (j = 1, 2, \ldots, m)$, ceea ce face ca în membrul drept V_i, S_i, $\bar{H}_i$ să devină respectiv, σ_i, $2\pi R_i$, π $(i = 1, 2, \ldots, s)$ unde σ_i este aria secțiunii normale a cilindrului K_i.

Ținînd seamă de cele de mai sus, relația (2.1) corespunzătoare cilindrilor circulari drepți, are expresia:

$$\int_{\{C_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, C_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} V^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s} \, dC_1 \wedge dC_2 \wedge \ldots \wedge dC_m = \tag{2.26}$$

$$= V_0 \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} (8\pi^2 \sigma_i)^{r_i} (2\pi^2 S_0 + 4\pi^2 R_i \bar{H}_0)^{m_i - r_i}$$

Cum, pentru cilindrii independenți [45], $C_1, C_2, \ldots, C_m$

(2.27)

$$\int_{\{C_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, C_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} dC_1 \wedge dC_2 \wedge \ldots \wedge dC_m = \prod_{i=1}^{s} 8\pi^2 \sigma_i + 2\pi^2 S_0 + 4\pi^2 R_i \bar{H}_0)^{m_i}$$

Valoarea medie $E\left(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right)$ are expresia:

$$E\left(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right) = V_0 \prod_{i=1}^{s} \frac{\binom{m_i}{r_i} (4\sigma_i)^{r_i} (S_0 + 2R_i \bar{H}_0)^{m_1 - r_i}}{(4\sigma_i + S_0 + 2R_i \bar{H}_0)^{m_i}} \tag{2.28}$$

Dacă toți cilindrii sînt egali, $s = 1$, $V^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s} = V^r_m$ iar (2.26), (2.28) se scriu:

(2.29)

$$\int_{\{C_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, C_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} V^r_m dC_1 \wedge \ldots \wedge dC_m = V_0 \binom{m}{r} (8\pi^2 \sigma)^r (2\pi^2 S_0 + 4\pi^2 R \bar{H}_0)^{m-r}$$

$$E(V^r_m) = V_0 \frac{\binom{m}{r} (4\sigma)^r (S_0 + 2R\bar{H}_0)^{m-r}}{(4\sigma + S_0 + 2R\bar{H}_0)^m} \tag{2.30}$$

Dacă notăm cu p, probabilitatea ca un punct interior lui K_0 să aparțină configurației $K^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}$ corespunzătoare cilindrilor, atunci avem:

$$p = \prod_{i=1}^{s} \frac{\binom{m_i}{r_i} (4\sigma_i)^{r_i} (S_0 + 2R_i \bar{H}_0)^{m_i - r_i}}{(4\sigma_i + S_0 + 2R_i \bar{H}_0)^{m_i}} \tag{2.31}$$

iar dacă cilindrii sînt egali $(s = 1)$:

$$p = \frac{\binom{m}{r} (4\sigma)^r (S_0 + 2R\bar{H}_0)^{m-r}}{(4\sigma + S_0 + 2R\bar{H}_0)^m} \tag{2.32}$$

De asemenea avem :

(2.33)

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty\\ m_2\to\infty\\ \cdots\\ m_s\to\infty}} E\left(V^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\right) = 2^r V_0 \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{r_i!}\left(\frac{k_i}{\frac{S_0}{2}+R_i\bar{H}_0}\right)^{r_i} \exp\left[-2\sum_{i=1}^{s}\frac{k_i}{\frac{S_0}{2}+R_i\bar{H}_0}\right]$$

unde am presupus $m_i\sigma_i = k_i$ (k_i = constante, $i = 1, 2, \dots, s$) ; ($r = r_1 + r_2 + \dots + r_s$).

Dacă $s = 1$ iar $m\sigma = k$ atunci :

(2.34)
$$\lim_{m\to\infty} E(V^r_m) = 2^r V_0 \frac{1}{r!}\left(\frac{k}{\frac{S_0}{2}+R\bar{H}_0}\right)^r \exp\left(\frac{-2k}{\frac{S_0}{2}+R\bar{H}_0}\right)$$

10) Dacă $\sigma^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}$ reprezintă aria frontierei configurației geometrice $K_0 \cap K^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}$ corespunzătoare cilindrilor, atunci :

(2.35)
$$\int_{\{C_1\cap K_0\neq\emptyset,\dots,C_m\cap K_0\neq\emptyset\}} \sigma^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\, dC_1\wedge dC_2\wedge\dots\wedge dC_m =$$

$$= \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}(8\pi^2\sigma_i)^{r_i}(2\pi^2 S_0 + 4\pi^2 R_i\bar{H}_0)^{m_i-r_i}\cdot\left[S_0 + \sum_{h=1}^{s} r_h(\sigma_h)^{-1}V_0(2\pi R_h) + \right.$$

$$\left. + 8\pi^2 V_0(2\pi R_h)(m_h - r_h)(2\pi^2 S_0 + 4\pi^2 R_i\bar{H}_0)^{-1}\right]$$

Valoarea medie corespunzătoare este dată de relația :

(2.36)
$$E\left(\sigma^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\right) = \prod_{t=1}^{s}\frac{\binom{m_t}{r_t}(4\sigma_t)^{r_t}(S_0+2R_t\bar{H}_0)^{m_t-r_t}}{(4\sigma_t+S_0+2R_t\bar{H}_0)^{m_t}}\cdot$$

$$\cdot\left[S_0 + 2\pi V_0\sum_{h=1}^{s}(r_h R_h)(\sigma_h)^{-1} + 4(m_h - r_h)R_h(S_0+2R_h\bar{H}_0)^{-1}\right]$$

Dacă cilindrii sînt toți egali, atunci relațiile (2.35), (2.36) devin :

(2.37)
$$\int_{\{C_1\cap K_0\neq\emptyset,\dots,C_m\cap K_0\neq\emptyset\}} \sigma^r_m dC_1\wedge dC_2\wedge\dots\wedge dC_m = \binom{m}{r}(8\pi^2\sigma)^r(2\pi^2 S_0 +$$

$$+ 4\pi^2 R\bar{H}_0)^{m-r}\{S_0 + 2\pi V_0[rR(\sigma)^{-1} + 4(m-r)R(S_0+2R\bar{H}_0)^{-1}]\}$$

(2.38)
$$E(\sigma^r_m) = \frac{\binom{m}{r}(4\sigma)^r(S_0+2R\bar{H}_0)^{m-r}}{(4\sigma+S_0+2R\bar{H}_0)^m}\{S_0+2\pi V_0[rR(\sigma)^{-1}+4(m-r)R(S_0+2R\bar{H}_0)^{-1}]\}$$

Scanned with OKEN Scanner

11) Formulele corespunzătoare se dau și pentru cazul cînd corpurile convexe sînt în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea infinită. Se procedează în același mod ca și în cazul cilindrilor, cu deosebirea că $\overline{H}_i = \pi(a_i + b_i + c_i)$, [61], unde a_i, b_i c_i sînt cele trei dimensiuni ale paralelipipedului dreptunghic K_i, (considerat inițial de lungime c_i *finită*).

Ca și la cilindri, în relațiile corespunzătoare se vor înlocui V_i cu $a_i \times b_i$, S_i cu $2(a_i + b_i)$ iar $\overline{H}_i$ cu π.

Astfel relațiilor (2.26) ÷ (2.38), le corespund, pentru cazul cînd corpurile convexe sînt în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea infinită, următoarele relații [22]:

(2.26′)
$$\int_{\{C_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, C_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} V^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s} \, dC_1 \wedge dC_2 \wedge \ldots \wedge dC_m =$$

$$= V_0 \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} (8\pi^2 a_i b_i)^{r_i} [2\pi^2 S_0 + 4\pi(a_i + b_i)\overline{H}_0]^{m_i - r_i}$$

(2.27′)
$$\int_{\{C_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, C_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} dC_1 \wedge dC_2 \wedge \ldots \wedge dC_m =$$

$$= \prod_{i=1}^{s} [8\pi^2 a_i b_i + 2\pi^2 S_0 + 4\pi(a_i + b_i)\overline{H}_0]^{m_i - r_i}$$

(2.28′)
$$E\left(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right) = V_0 \prod_{i=1}^{s} \frac{\binom{m_i}{r_i} (4\pi a_i b_i)^{r_i} [\pi S_0 + 2(a_i + b_i)\overline{H}_0]^{m_i - r_i}}{[4\pi a_i b_i + \pi S_0 + 2(a_i + b_i)\overline{H}_0]^{m_i}}$$

(2.29′)
$$\int_{\{C_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, C_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} V^r_m \, dC_1 \wedge \ldots \wedge dC_m =$$

$$= V_0 \binom{m}{r} (8\pi^2 ab)^r [2\pi^2 S_0 + 4\pi(a + b)\overline{H}_0]^{m-r}$$

(2.30′)
$$E(V^r_m) = V_0 \frac{\binom{m}{r} (4\pi ab)^r [\pi S_0 + 2(a + b)\overline{H}_0]^{m-r}}{[4\pi ab + \pi S_0 + 2(a + b)\overline{H}_0]^m}$$

(2.31′)
$$p = \prod_{i=1}^{s} \frac{\binom{m_i}{r_i} (4\pi a_i b_i)^{r_i} [\pi S_0 + 2(a_i + b_i)\overline{H}_0]^{m_i - r_i}}{[4\pi a_i b_i + \pi S_0 + 2(a_i + b_i)\overline{H}_0]^{m_i}}$$

(2.32′)
$$p = \frac{\binom{m}{r} (4\pi ab)^r [\pi S_0 + 2(a + b)\overline{H}_0]^{m-r}}{[4\pi ab + \pi S_0 + 2(a + b)\overline{H}_0]^m}$$

Scanned with OKEN Scanner

(2.33′)

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty\\ \dots\\ m_s\to\infty}} E\left(V^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\right) = V_0 \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{r_i!}\left(\frac{k_i}{\frac{\pi S_0}{2} + (a_i+b_i)\bar{H}_0}\right)^{r_i} \cdot \exp\left[\sum_{i=1}^{s} \frac{-2\pi k_i}{\frac{\pi S_0}{2} + (a_i+b_i)\bar{H}_0}\right]$$

unde s-a presupus $m_i\sigma_i = k_i$; $(\sigma_i = a_ib_i)$.

Dacă corpurile paralelipipedice sînt egale, atunci avem :

(2.34′)
$$\lim_{m\to\infty} E\left(V^r_m\right) = V_0 \frac{1}{r!}\left(\frac{k}{\frac{\pi S_0}{2} + (a+b)\bar{H}_0}\right)^r \exp\left(\frac{-2\pi k}{\frac{\pi S_0}{2} + (a+b)\bar{H}_0}\right)$$

pentru $m\sigma = k$ (constant), unde $\sigma = ab$.

De asemenea avem :

(2.35′)
$$\int_{\{C_1\cap K_0\neq\emptyset,\dots,C_m\cap K_0\neq\emptyset\}} \sigma^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\, dC_1 \wedge \dots \wedge dC_m = \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i}(8\pi^2 a_ib_i)^{r_i}[2\pi^2 S_0 +$$

$$+4\pi(a_i+b_i)\bar{H}_0]^{m_i-r_i}\left\{S_0 + 2V_0\sum_{h=1}^{s} r_h(a_h+b_h)(a_hb_h)^{-1} +\right.$$

$$\left. + 4\pi(m_h - r_h)(a_h+b_h)[\pi S_0 + 2(a_h+b_h)\bar{H}_0]^{-1}\right\}$$

(2.36′)
$$E\left(\sigma^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\right) = \prod_{i=1}^{s} \frac{\binom{m_i}{r_i}(4\pi a_ib_i)^{r_i}[\pi S_0 + 2(a_i+b_i)\bar{H}_0]^{m_i-r_i}}{[4\pi a_ib_i + \pi S_0 + 2(a_i+b_i)\bar{H}_0]^{m_i}} \cdot$$

$$\cdot\left\{S_0 + 2V_0\sum_{h=1}^{s} r_h(a_h+b_h)(a_hb_h)^{-1} + 4\pi(m_h - r_h)(a_h+b_h)[\pi S_0 + 2(a_h+b_h)\bar{H}_0]^{-1}\right\}$$

Dacă corpurile sînt toate egale ($s = 1$), atunci (2.35′), (2.36′) devin :

(2.37′)
$$\int_{\{C_1\cap K_0\neq\emptyset,\dots,C_m\cap K_0\neq\emptyset\}} \sigma^r_m dC_1 \wedge \dots \wedge dC_m = \binom{m}{r}(4\pi ab)^r[\pi S_0 + 2(a+b)\bar{H}_0]^{m-r} \cdot$$

$$\cdot\{S_0 + 2V_0 r(a+b)(ab)^{-1} + 8\pi V_0(m-r)(a+b)[\pi S_0 + 2(a+b)\bar{H}_0]^{-1}\}$$

(2.38′)
$$E(\sigma^r_m) = \frac{\binom{m}{r}(4\pi ab)^r[\pi S_0 + 2(a+b)\bar{H}_0]^{m-r}}{[4\pi ab + \pi S_0 + 2(a+b)\bar{H}_0]^m} \cdot$$

$$\cdot\{S_0 + 2V_0 r(a+b)(ab)^{-1} + 8\pi V_0(m-r)(a+b)[\pi S_0 + 2(a+b)\bar{H}_0]^{-1}\}$$

Scanned with OKEN Scanner

12) Tot pentru cilindrii circulari de lungime infinită, formula (2.21) are forma [34]:

$$(2.39)\qquad \int_{\{C_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,C_m\cap K_0\neq\emptyset\}} N_m^r\,dC_1\wedge dC_2\wedge\ldots\wedge dC_m=\binom{m}{r}(8\pi^2\sigma)^r B^{m-r}+$$

$$+\binom{m}{2}\binom{m-2}{r-2}(8\pi^2\sigma)^{r-2}B^{m-r}(8\pi^2V_0)(8\pi^3R)+$$

$$+2\binom{m}{2}\binom{m-2}{r-1}(8\pi^2\sigma)^{r-1}B^{m-r-1}(8\pi^2V_0)(8\pi^3R)+$$

$$+\binom{m}{2}\binom{m-2}{r}(8\pi^2\sigma)^{r}B^{m-r-2}(8\pi^2V_0)(8\pi^3R)+$$

$$+\binom{m}{3}\binom{m-3}{r-3}(8\pi^2\sigma)^{r-3}B^{m-r}(8\pi^2V_0)(8\pi^8R^3)+$$

$$+\binom{m}{3}\binom{m-3}{r}(8\pi^2\sigma)^{r}B^{m-r-3}(8\pi^2V_0)(8\pi^8R^3)+$$

$$+3\binom{m}{3}\binom{m-3}{r-2}(8\pi^2\sigma)^{r-2}B^{m-r-1}(8\pi^2V_0)(8\pi^8R^3)+$$

$$+\binom{m}{2}\binom{m-2}{r}(8\pi^2\sigma)^{r}B^{m-r-2}(4\pi^7S_0R^2)+$$

$$+2\binom{m}{2}\binom{m-2}{r-1}(8\pi^2\sigma)^{r-1}B^{m-r-1}(4\pi^7S_0R^2)+m\binom{m-1}{r-1}(8\pi^2\sigma)^{r-1}B^{m-r+1}+$$

$$+m\binom{m-1}{r}(8\pi^2\sigma)^{r}B^{m-r}+3\binom{m-3}{r-1}\binom{m}{3}(8\pi^2\sigma)^{r-1}B^{m-r-2}(8\pi^2V_0)(8\pi^8R^3)+$$

$$+\binom{m}{2}\binom{m-2}{r-2}(8\pi^2\sigma)^{r-2}B^{m-r}(4\pi^7S_0R^2),$$

unde s-a notat:

$$(2.40)\qquad B=2\pi^2S_0+4\pi^2R\overline{H}_0$$

a) Dacă în formula (2.21) se ia $m=r=2$ rezultă relaţia corespunzătoare dată de Blaschke, care se găseşte în [68].

b) Pentru $m=r=2$, din (2.39) se obţine relaţia corespunzătoare dată de Santaló în [68].

c) Dacă K_0 este o curbă deschisă de lungime L_0, de clasă C^2, din (2.21) şi (2.39), ($S_0=V_0=0$; $\overline{H}_0=\pi L_0$) se obţin formulele [34]:

$$(2.41)\qquad \int_{\{K_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,K_m\cap K_0\neq\emptyset\}} N_m^r\,dK_1\wedge dK_2\wedge\ldots\wedge dK_m=\binom{m}{r}(8\pi^2V)^r(2\pi^2SL_0)^{m-r}+$$

$$+m\binom{m-1}{r-1}(8\pi^2V)^{r-1}(2\pi^2SL_0)^{m-r+1}+m\binom{m-1}{r}(8\pi^2V)^{r}(2\pi^2SL_0)^{m-r}$$

Scanned with OKEN Scanner

(2.42)

$$\int_{\{C_1 \cap K_0 \neq \emptyset, \ldots, C_m \cap K_0 \neq \emptyset\}} N_m^r \, dC_1 \wedge dC_2 \wedge \ldots \wedge dC_m =$$

$$= \binom{m}{r}(8\pi^2\sigma)^r(4\pi^3 RL_0)^{m-r} + m\binom{m-1}{r}(8\pi^2\sigma)^r(4\pi^3 RL_0)^{m-r} +$$

$$+ m\binom{m-1}{r-1}(8\pi^2\sigma)^{r-1}(4\pi^3 RL_0)^{m-r+1}$$

Dacă în (2.42), se consideră $m = r = 1$, rezultă formula dată de Santaló [68]:

(2.43)
$$\int_{\{C \cap K_0 \neq \emptyset\}} n\,dC = 8\pi^2\sigma + 4\pi^3 RL_0$$

Dacă în (2.41) și (2.42) se împarte respectiv prin $(8\pi^2 V + 2\pi^2 SL_0)^m$, $(8\pi^2\sigma + 4\pi^3 RL_0)^m$ se obțin valorile medii corespunzătoare.

13) *a*) Dacă se face ipoteza că figurile convexe $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sînt perechi de plane paralele la distanța b, se poate considera inițial, că sînt cilindrii de formă paralelipipedică cu secțiunea $a \times b$, la care făcînd $a \to \infty$, se obține o astfel de pereche de plane.

Notînd cu $d\vec{Y}$ măsura cinematică elementară corespunzînd unei astfel de perechi de plane, avem:

(2.43)
$$d\vec{C} = d\vec{Y} \wedge da \wedge d\varphi$$

unde φ este un unghi de rotație, iar dC măsura cinematică corespunzătoare cilindrilor.

Din [68], avem formula:

(2.44)
$$\int_{\{Y \cap K_0 \neq \emptyset\}} \chi(K_0 \cap Y)\,d\vec{Y} = 4\pi b + 2\bar{H}_0$$

Valoarea medie corespunzătoare, pentru numărul de domenii simplu conexe al configurației geometrice $K_0 \cap K_m^r$, cînd $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sînt perechi de plane paralele la distanța b, va fi dată de formula [33]:

(2.45)
$$E(N_m^r) = (4\pi b + 2\bar{H}_0)^{-m}\left[\binom{m}{r}(4\pi b)^r(2\bar{H}_0)^{m-r} +\right.$$

$$+ 8\binom{m}{3}\binom{m-3}{r-3}\pi^4 V_0(4\pi b)^{r-3}(2\bar{H}_0)^{m-r} +$$

$$+ 8\binom{m}{3}\binom{m-3}{r}\pi^4 V_0(2\bar{H}_0)^{m-r-3}(4\pi b)^r +$$

$$+ 24\binom{m}{3}\binom{m-3}{r-2}\pi^4 V_0(4\pi b)^{r-2}(2\bar{H}_0)^{m-r-1} +$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\binom{m}{2}\binom{m-2}{r}\pi^3 S_0(4\pi b)^r(2\bar{H}_0)^{m-r-2}+$$

$$+\binom{m}{2}\binom{m-2}{r-2}\pi^3 S_0(4\pi b)^{r-2}(2\bar{H}_0)^{m-r}+$$

$$+2\binom{m}{2}\binom{m-2}{r-1}\pi^3 S_0(4\pi b)^{r-1}(2\bar{H}_0)^{m-r-1}+$$

$$+m\binom{m-1}{r}(4\pi b)^r(2\bar{H}_0)^{m-r}+m\binom{m-1}{r-1}(4\pi b)^{r-1}(2\bar{H}_0)^{m-r-1}+$$

$$+24\binom{m}{3}\binom{m-3}{r-1}\pi^4 V_0(2\bar{H}_0)^{m-r-2}(4\pi b)^{r-1}\Big]$$

b) Presupunînd în (2.45) K_0 o curbă de clasă C^2, deschisă, de lungime L_0 şi înlocuind $S_0 = V_0 = 0$, $\bar{H}_0 = \pi L_0$, se obţine formula integrală :

$$\int_{\{Y_1\cap K_0\neq\emptyset,\ldots,Y_m\cap K_0\neq\emptyset\}} N_m^r\,dY_1\wedge dY_2\wedge\ldots\wedge dY_m = \tag{2.46}$$

$$=\binom{m}{r}(4\pi b)^r(2\pi L_0)^{m-r}+m\binom{m-1}{r}(4\pi b)^r(2\pi L_0)^{m-r}+$$

$$+m\binom{m-1}{r-1}(4\pi b)^{r-1}(2\pi L_0)^{m-r+1}$$

— Dacă în formula precedentă se înlocuieşte $m = r = 1$ se obţine formula [68], dată de Santaló :

$$\int_{\{Y\cap K_0\neq\emptyset\}} n\,dY = 4\pi b + 2\pi L_0 \tag{2.46'}$$

— Pentru $b = r = 0$, $m \geq 3$, în (3.46), se obţine numărul domeniilor în care planele respective împart corpul convex K_0 :

$$E(N_m^0) = m + 1 + \binom{m}{3}\pi^4 V_0\bar{H}_0^{-3} + \frac{1}{4}\binom{m}{2}\pi^3 S_0\bar{H}_0^{-2} \tag{2.46''}$$

Observaţie. Fără a folosi operaţia de trecere la limită, ca în cele două cazuri precedente, din formulele stabilite pentru corpuri convexe oarecare, se pot scrie formulele corespunzătoare pentru corpurile convexe particulare, ca în exemplele următoare :

— pentru poliedre convexe, se utilizează formula lui Blaschke :

$$\bar{H} = \frac{1}{2}\sum_i l_i\alpha_i$$

Scanned with OKEN Scanner

unde l_i este lungimea unei muchii, iar α_i este unghiul diedru corespunzător, suma fiind extinsă la toate muchiile poliedrului. La cuburi $\bar{H} = 3\pi a$, la sfere $\bar{H} = 4\pi R$, la paralelipiped $\bar{H} = \pi(a + b + c)$, la corpuri cu grosime constantă d, $\bar{H} = 2\pi d$, de care se ține seama în formulele generale pentru corpuri convexe.

§5.3. APLICAȚII ALE TEORIEI REȚELELOR

1) Considerăm formula (5.1), cap. IV. Dacă în această formulă luăm:

$$f(K_1 \cap K_0,\ K_2 \cap K_0,\ \ldots,\ K_m \cap K_0) = V^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$$

și ținem seama de formula (2.1) rezultă:

$$\int_{\{\alpha_0\}} \left(V^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}\right)_0 \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = \tag{3.1}$$

$$= V_0 \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} (8\pi^2 V_i)^{r_i} [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0 \bar{H}_i + S_i \bar{H}_0)]^{m_i - r_i}$$

unde $\left(V^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}\right)_0$ reprezintă volumul configurației geometrice $\bigcup_i \left(T_i K_0 \cap \right.$ $\left. \cap \tilde{K}^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}\right)$; $\tilde{K}^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ reprezintă configurația geometrică formată cu punctele comune a r_1 din cele m_1 corpur convexe date, r_2 din cele m_2, r_s din cele m_s, considerîndu-se numai acele poziții ale corpurilor $K_1, K_2, \ldots, K_m$ pentru care $P(x, y, z)$ din (2.2), aparține domeniului α_0; $\{\alpha_0\} = \alpha_0 \times \alpha_0 \times$ $\times \ldots \times \alpha_0 = \alpha_0^m$.

Cum [28]:

$$\int_{\alpha_0} \mathrm{d}K = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \int_{P \in \alpha_0} \mathrm{d}P = 8\pi^2 \bar{V}_0 \tag{3.2}$$

unde $\bar{V}_0$ reprezintă volumul celulei fundamentale α_0, urmează:

$$\int_{\{\alpha_0\}} \mathrm{d}K_1 \wedge \mathrm{d}K_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = (8\pi^2 \bar{V}_0)^m \tag{3.3}$$

deoarece corpurile convexe $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sînt presupuse independente [45].

Din (3.1) și (3.3) rezultă valoarea medie:

$$E\left[\left(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right)_0\right] = V_0 \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} \left(\frac{V_i}{\bar{V}_0}\right)^{r_i} \left[\frac{V_0}{\bar{V}_0} + \frac{1}{4\pi \bar{V}_0}(S_0 \bar{H}_i + S_i \bar{H}_0)\right]^{m_i - r_i} \tag{3.4}$$

2) Dacă în formula (5.1), cap. IV, luăm:

$$f(K_1 \cap K_0,\ K_2 \cap K_0,\ \ldots,\ K_m \cap K_0) = \sigma^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi ţinem seama de relaţia (2.8), se obţine:

$$(3.5)\qquad \int_{\{\alpha_0\}} (\sigma^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s})_0 \, dK_1 \wedge dK_2 \wedge \dots \wedge dK_m =$$

$$= \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} (8\pi^2 V_i)^{r_i} [8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0 \bar{H}_i + S_i \bar{H}_0)]^{m_i - r_i} \cdot$$

$$\cdot \left\{ S_0 + \sum_{h=1}^{s} [r_h (V_h)^{-1} V_0 S_h + 8\pi^2 V_0 (m_h - r_h) S_h (8\pi^2 V_0 + 2\pi S_0 \bar{H}_h + 2\pi S_h \bar{H}_0)^{-1}] \right.$$

unde $(\sigma^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s})_0$ reprezintă aria configuraţiei geometrice $\bigcup_i (T_i K_0 \cap \tilde{K}^{r_1 \dots r_s}_{m_1 \dots m_s})$.

Din (3.5) şi (3.3) rezultă valoarea medie:

$$(3.6)\qquad E\left[\left(\sigma^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}\right)_0\right] = \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} \left(\frac{V_i}{\bar{V}_0}\right)^{r_i} \left[\frac{V_0}{\bar{V}_0} + \frac{1}{4\pi \bar{V}_0} (S_0 \bar{H}_i + S_i \bar{H}_0)\right]^{m_i - r_i} \cdot$$

$$\cdot \left\{ S_0 + \sum_{h=1}^{s} r_h (V_h)^{-1} V_0 S_h + 8\pi^2 V_0 (m_h - r_h) S_h (8\pi^2 V_0 + 2\pi S_0 \bar{H}_h + 2\pi S_h \bar{H}_0)^{-1} \right\}$$

3) Luînd în formula (5.1), cap. IV:

$$f(K_1 \cap K_0,\ K_2 \cap K_0,\ \dots,\ K_m \cap K_0) = N^r_m$$

şi ţinînd seama de formula (2.21) şi (3.3) şi dacă $K_0 \equiv \alpha_0$ rezultă valoarea medie:

$$(3.7)\qquad E[(N^r_m)_0] = \binom{m}{r} \left(\frac{V}{\bar{V}_0}\right)^r \left[1 + \frac{1}{4\pi \bar{V}_0} (S_0 \bar{H} + S \bar{H}_0)\right]^{m-r} \cdot \left\{ 1 + [r(8\pi^2 V)^{-1} + \right.$$

$$+ (m-r) A^{-1}] (8\pi^2 \bar{V}_0) + \frac{r(r-1)}{2} (8\pi^2 V)^{-2} (8\pi^2 \bar{V}_0)(4\pi S \bar{H}) +$$

$$+ r(m-r)(8\pi^2 \bar{V}_0)(4\pi S \bar{H})(8\pi^2 V A)^{-1} + \frac{(m-r)(m-r-1)}{2} (8\pi^2 \bar{V}_0)(4\pi S \bar{H}) A^{-2} +$$

$$+ \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} (8\pi^2 \bar{V}_0) \pi^5 S^3 (8\pi^2 V)^{-3} + \frac{(m-r)(m-r-1)(m-r-2)}{3!} (\pi^5 S^3) A^{-3} (8\pi^2 \bar{V}_0) +$$

$$+ \frac{r(r-1)(m-r)}{2} (8\pi^2 V)^{-2} (8\pi^2 \bar{V}_0)(\pi^5 S^3) A^{-1} + \frac{(m-r)(m-r-1)}{2} A^{-2} \pi^5 S_0 S^2 +$$

$$+ \frac{r(r-1)}{2} (8\pi^2 V)^{-2} (\pi^5 S_0 S^2) + r(m-r)(8\pi^2 V A)^{-1} \pi^5 S_0 S^2 + r(8\pi^2 V)^{-1} (2\pi S_0 \bar{H} +$$

$$+ 2\pi S \bar{H}_0) + (m-r)(2\pi S_0 \bar{H} + 2\pi S \bar{H}_0) A^{-1} +$$

$$\left. + \frac{r(m-r)(m-r-1)}{2} (8\pi^2 V)^{-1} (\pi^5 S^3)(8\pi^2 \bar{V}_0) A^{-2} \right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $(N_m^r)_0$ reprezintă numărul domeniilor simplu conexe din care este formată configurația geometrică $\bigcup_i (T_i K_0 \cap \tilde{K}_m^r)$, $\tilde{K}_m^r$ având o semnificație similară cu $\tilde{K}_{m_1 \dots m_s}^{r_1 \dots r_s}$ $(s = 1)$.

Avem astfel următorul rezultat:

Teorema 3.1. *Fie în spațiul euclidian o rețea regulată a cărei celulă fundamentală coincide cu K_0. Atunci dat sistemul de corpuri convexe $K_1, K_2, \dots, K_m$ aleatoare ca poziție, în raport cu măsura cinematică din R_3, independente, configurația geometrică $\tilde{K}_m^r$ poate fi acoperită cu $N \leqslant E(N_m^r)_0$ celule ale rețelei, unde $E(N_m^r)_0$ are expresia* (3.7).

4) În spațiul euclidian R_n, măsura cinematică elementară are expresia [68]:

$$dK = dP \wedge dO_{n-1} \wedge \dots \wedge dO_2 \wedge dO_1 \tag{3.8}$$

unde $dP = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$, iar dO_i este elementul de arie pe sfera i dimensională unitate din spațiul R_n.

Notăm:

$$M_h^0 = \frac{1}{\binom{n-1}{h}} \int_{\partial K_0} \{R_1, R_2, \dots, R_{n-1}\}_h d\sigma_0 \tag{3.9}$$

$$M_h = \frac{1}{\binom{n-1}{h}} \int_{\partial K} \{R_1, R_2, \dots, R_{n-1}\}_h d\sigma \tag{3.10}$$

unde $d\sigma_0$ și $d\sigma$ sînt elemente de arii pe hipersuprafețele ∂K_0, respectiv ∂K, frontierele corpurilor K_0, K, iar $\{R_1, R_2, \dots, R_{n-1}\}_h$ este funcția simetrică (elementară) a celor $n-1$ curburi principale ale hipersuprafețelor ∂K_0 și ∂K.

Grupul maxim de mișcări din R_n este grupul ortogonal $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$ de ecuații:

$$x'^i = \lambda_j^i x^j + \gamma^i \tag{3.11}$$

cu

$$\lambda_k^i \lambda_j^k = \delta_j^i; \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Din (3.8) avem:

$$\int_{\alpha_0} dK = \overline{V}_0 O_1 O_2 \dots O_{n-1}$$

unde $\overline{V}_0$ este volumul celulei fundamentale α_0.

Dacă în formula (5.1), cap. IV luăm:

$$f(K_1 \cap K_0, K_2 \cap K_0, \dots, K_m \cap K_0) = V_{m_1 \dots m_s}^{r_1 \dots r_s}$$

Scanned with OKEN Scanner

respectiv :

$$f(K_1 \cap K_0,\ K_2 \cap K_0,\ \ldots,\ K_m \cap K_0) = \sigma^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}$$

formulele din R_n corespunzătoare formulelor (3.1), (3.4), (3.5), (3.6) din R_3, sînt următoarele [28] :

(3.1′) $$\int_{\{\alpha_0\}} \left(V^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}\right)_0 \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = V_0 (O_1\ O_2\ \ldots\ O_{n-1})^m \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} (V_i)^{r_i} \left[V_0 + \frac{1}{nO_{n-1}} \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n}{h+1} M_h^{(0)} M_{n-h-2}^{i} \right]^{m_i - r_i}$$

(3.4′) $$E\left[\left(V^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right)_0\right] =$$

$$= V_0 \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{V_i}{\bar{V}_0}\right)^{r_i} \left[\frac{V_0}{\bar{V}_0} + \frac{1}{n \bar{V}_0 O_{n-1}} \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n}{h+1} M_h^{(0)} M_{n-h-2}^{i} \right]^{m_i - r_i}$$

(3.5′) $$\int_{\{\alpha_0\}} \left(S^{r_1 \ldots r_s}_{m_1 \ldots m_s}\right)_0 \mathrm{d}K_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}K_m = (O_1\ O_2\ \ldots\ O_{n-1})^m \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} (V_i)^{r_i} \left[V_0 + \frac{1}{nO_{n-1}} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^{(0)} M_{n-h-2}^{i} \right]^{m_i - r_i} \times$$

$$\times \left\{ \left\{ S_0 + \sum_{h=1}^{s} \left\{ r_h (V_h)^{-1} V_0 S_h + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + (m_h - r_h) V_0 S_h \left[V_0 + \frac{1}{nO_{n-1}} \sum_{s=0}^{n-2} \binom{n}{s+1} M_s^{(0)} M_{n-s-2}^{h} \right]^{-1} \right\} \right\} \right\}$$

(3.6′) $$E\left[\left(S^{r_1 r_2 \ldots r_s}_{m_1 m_2 \ldots m_s}\right)_0\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} \left(\frac{V_i}{\bar{V}_0}\right)^{r_i} \left[\frac{V_0}{\bar{V}_0} + \frac{1}{n \bar{V}_0 O_{n-1}} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^{(0)} M_{n-h-2}^{(i)} \right]^{m_i - r_i} \times$$

$$\times \left\{ \left\{ S_0 + \sum_{h=1}^{s} \left\{ r_h (V_h)^{-1} V_0 S_h + (m_h - r_h) V_0 S_h \left[V_0 + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. + \frac{1}{nO_{n-1}} \sum_{s=0}^{n-2} \binom{n}{s+1} M_{n-s-2}^{h} M_s^{(0)} \right]^{-1} \right\} \right\} \right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

§5.4. PROCESE POISSON ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN

1) Dacă în formula integrală (2.7) se notează:

$$p_i = \frac{8\pi^2 V_i}{8\pi^2(V_0 + V_i) + 2\pi(S_0\bar{H}_i + S_i\bar{H}_0)}$$

$$q_i = \frac{8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0\bar{H}_i + S_i\bar{H}_0)}{8\pi^2(V_0 + V_i) + 2\pi(S_0\bar{H}_i + S_i\bar{H}_0)}$$

aceasta se scrie sub forma:

$$E\left(V^{r_1\dots r_s}_{m_1\dots m_s}\right) = \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i} p_i^{r_i} q_i^{m_i - r_i} V_0 \tag{4.1}$$

Formula precedentă se poate obține și din aplicarea formulei lui H. E. Robbins (2.1), cap. IV.

Folosind aceste notații, simplificatoare, ne putem pune problema de a determina valoarea medie a volumului configurației geometrice $K_0 \cap Q^r_m$, unde Q^r_m reprezintă figura geometrică formată cu punctele comune a r corpuri convexe din cele $m = m_1 + m_2 + \dots + m_s$ date [26].

Aplicînd formula lui H. E. Robbins (2.1) cap. IV, rezultă valoarea medie:

$$E(V^r_m) = \sum_{r_1 + r_2 + \dots + r_s = r} E\left(V^{r_1 r_2 \dots r_s}_{m_1 m_2 \dots m_s}\right) \tag{4.2}$$

Ținînd seamă de (4.1) avem:

$$E(V^r_m) = V_0 \sum_{r_1 + r_2 + \dots + r_s = r} \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i} p_i^{r_i} q_i^{m_i - r_i} \tag{4.3}$$

Dacă corpurile convexe sînt egale

$$p_i = p = \frac{8\pi^2 V}{8\pi^2(V_0 + V) + 2\pi(S_0\bar{H} + S\bar{H}_0)} \tag{4.4}$$

$$q_i = q = \frac{8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0\bar{H} + S\bar{H}_0)}{8\pi^2(V_0 + V) + 2\pi(S_0\bar{H} + S\bar{H}_0)}$$

atunci

$$\prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i} p_i^{r_i} q_i^{m_i - r_i} = p^r q^{m-r} \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i} \tag{4.5}$$

unde

$$r = \sum_{i=1}^{s} r_i \quad \text{și} \quad m = \sum_{i=1}^{s} m_i$$

Cum

$$\sum_{r_1 + r_2 + \dots + r_s = r} \prod_{i=1}^{s}\binom{m_i}{r_i} = \binom{m}{r} \tag{4.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

din (4.4), (4.5), (4.6) și (4.3) rezultă:

$$E(V_m^r) = \binom{m}{r} p^r q^{m-r} V_0 \tag{4.7}$$

adică formula dată în lucrarea [76].

2) Cu notațiile (4.4) formula (2.9) se scrie:

$$E\left(\sigma_{m_1 \dots m_s}^{r_1 \dots r_s}\right) = \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} p_i^{r_i} q_i^{m_i - r_i} \cdot \left\{ S_0 + \sum_{h=1}^{s} r_h (V_h)^{-1} V_0 S_h + \right. \tag{4.8}$$

$$\left. + 8\pi^2 V_0 S_h (m_h - r_h) [8\pi^2 V_0 + 2\pi (S_0 \overline{H}_h + S_h \overline{H}_0)]^{-1} \right\}$$

Dacă notăm cu σ_m^r aria frontierei $\partial(K_0 \cap Q_m^r)$ atunci aplicînd formula (2.1), cap. IV, se obține valoarea medie:

$$E(\sigma_m^r) = \sum_{r_1 + r_2 + \dots + r_s = r} E\left(\sigma_{m_1 \dots m_s}^{s_1 \dots r_s}\right)$$

Din (4.8)

$$E(\sigma_m^r) = \sum_{r_1 + r_2 + \dots + r_s = r} \prod_{i=1}^{s} \binom{m_i}{r_i} p_i^{r_i} q_i^{m_i - r_i} \cdot \tag{4.9}$$

$$\cdot \left\{ S_0 + \sum_{h=1}^{s} r_h (V_h)^{-1} V_0 S_h + 8\pi^2 V_0 S_h (m_h - r_h) [8\pi^2 V_0 + 2\pi (S_0 \overline{H}_h + S_h \overline{H}_0)]^{-1} \right\}$$

Dacă corpurile convexe sînt egale, rezultă relația:

$$E(\sigma_m^r) = p^r q^{m-r} \{ S_0 + V_0 V^{-1} S r + 8\pi^2 V_0 S (m - r) \cdot$$

$$\cdot [8\pi^2 V_0 + 2\pi (S_0 \overline{H} + S \overline{H}_0)]^{-1} \} \sum_{r_1 + r_2 + \dots + r_s = r} \prod_{t=1}^{s} \binom{m_t}{r_t}$$

Ținînd seamă de (4.6) în egalitatea precedentă rezultă:

$$E(\sigma_m^r) = \binom{m}{r} p^r q^{m-r} \{ S_0 + r S V^{-1} V_0 + 8\pi^2 V_0 S (m - r) [8\pi^2 V_0 + 2\pi (S_0 \overline{H} + S \overline{H}_0)]^{-1} \} \tag{4.10}$$

adică, formula corespunzătoare din [76].

Probleme similare se pot pune și cînd figurile convexe respective devin cilindrii de lungime infinită; de asemenea se pot da formulele corespunzătoare în spațiul euclidian R_n.

3) Presupunem că numărul m al corpurilor convexe $K_1, K_2, \dots, K_m$ de poziție aleatoare în raport cu măsura cinematică ce intersectează figura convexă de poziție fixă K_0, nu mai este fix ci aleator, numărul m_i^r reprezentînd valorile variabilei aleatoare:

$$\xi(K_0) = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_m & \dots \end{Bmatrix}; \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \tag{4.11}$$

În această situație, (4.10) reprezintă valoarea medie condiționată pentru cazul cînd $\xi(K_0) = m$.

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu $E(V^{(r)})$ valoarea medie a volumului corespunzător $K_0 \cap K^{(r)}$, unde $K^{(r)}$ reprezintă mulţimea aleatoare cu punctele comune a r corpuri convexe pentru cazul cînd numărul acestora este aleator, avem formula [32]:

$$E(V^{(r)}) = \sum_{m=0}^{\infty} E(V_m^r) p_m \tag{4.12}$$

Dacă pentru orice mulţime K măsurabilă Borel se face ipoteza:

$$P(\xi(K) = m) = e^{-\lambda\mu(K)} \frac{(\lambda\mu(K))^m}{m!}\ ;\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.13}$$

$\mu(K)$ fiind măsura lui K, atunci:

$$E(V^{(r)}) = \frac{(p\,\lambda V_0)^r}{r!} e^{-\lambda p V_0} V_0 \tag{4.14}$$

unde $\mu(K_0) = V_0$.

Se observă că

$$\sum_{r=0}^{\infty} E(V^{(r)}) = V_0 \tag{4.15}$$

iar din teorema lui H. E. Robbins (2.1) cap. IV,

$$\frac{(p\lambda V_0)^r}{r!} e^{-\lambda p V_0},\ r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.16}$$

reprezintă probabilitatea ca un punct $M \in K_0$, să aparţină mulţimii $K^{(r)} \cap K_0$.

4) Dacă notăm cu $S^{(r)}$ aria frontierei $\partial(K_0 \cap K^{(r)})$, în ipoteza (4.11):

$$E(S^{(r)}) = \sum_{m=0}^{\infty} E(\sigma_m^r) p_m \tag{4.17}$$

unde $E(\sigma_m^r)$ are expresia (4.10).

Dacă p_m este dat de (4.13) cu $\mu(K) = V_0$, atunci (4.17) devine:

(4.18)

$$E(S^{(r)}) = \frac{(p\lambda V_0)^r}{r!} e^{-\lambda p V_0} \{S_0 + rV_0 S V^{-1} + 8\pi^2 V_0 S(q\lambda S_0)[8\pi^2 V_0 + 2\pi(S_0\bar{H} + S\bar{H}_0)]^{-1}\}$$

Probleme similare se pot pune pentru formulele (2.21), (2.7), (2.9), (2.13) şi pentru formulele corespunzătoare cilindrilor.

5) Dacă se face ipoteza că:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ V_0\to\infty}} \frac{m}{V_0} = \rho\ ;\ (\rho > 0) \tag{4.19}$$

unde K_0 se extinde la întreg spaţiul, atunci [68]:

$$\lim \frac{S_0}{V_0} = 0,\quad \lim \frac{\bar{H}_0}{S_0} = 0\ ;\quad \lim \frac{\bar{H}_0}{V_0} = 0 \tag{4.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar din (2.16):

$$\lim E\left(\frac{V_m^r}{V_0}\right) = \frac{(\rho V)^r}{r!} e^{-\rho V} \tag{4.21}$$

care, după teorema lui H. E. Robbins [59], reprezintă limita probabilității ca un punct din spațiu să aparțină la r corpuri convexe, în ipoteza (4.19).

De asemenea, tot în ipoteza (4.19), din (2.18), (2.19), (2.21) rezultă:

$$\lim E\left(\frac{\sigma_m^r}{V_0}\right) = \frac{(\rho V)^r}{r!} [rV^{-1}S + \rho S] e^{-\rho V} \tag{4.22}$$

$$\lim E\left(\frac{\bar{H}_m^r}{V_0}\right) = \frac{(\rho V)^r}{r!} e^{-\rho V}\Big[rV^{-1}\bar{H} + \rho\bar{H} + \tag{4.23}$$

$$+ 2r(r-1)\pi^6 S^2 (8\pi^2 V)^{-2} + \frac{\pi^4}{2}\rho r S^2 (8\pi^2 V)^{-1} + \frac{\pi^2}{32}\rho^2 S^2\Big]$$

$$\lim E\left(\frac{N_m^r}{V_0}\right) = \frac{(\rho V)^r}{r!} e^{-\rho V}\Big[rV^{-1} + \rho + \frac{r(r-1)S\bar{H}V^{-2}}{4\pi} + \tag{4.24}$$

$$+ \frac{r\rho S\bar{H}V^{-1}}{2\pi} + \frac{\rho^2 S\bar{H}}{4\pi} + \frac{r(r-1)(r-2)\pi S^3 V^{-3}}{384} + \frac{\pi S^3\rho^3}{384} + \frac{\pi r(r-1)\rho S^3 V^{-2}}{128} + \frac{\pi r\rho^2 S^3 V^{-1}}{128}\Big]$$

6) În cazul cînd corpurile convexe sînt cilindrii de lungime infinită dacă presupunem:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ S_0\to\infty}} \frac{m}{S_0} = \frac{\lambda}{4}\ ;\ (\lambda > 0) \tag{4.25}$$

unde K_0 se extinde la întreg spațiul, din (2.30), (2.38), (2.39), atunci:

$$\lim E\left(\frac{V_m^r}{V_0}\right) = \frac{(\lambda\sigma)^r}{r!} e^{-\lambda\sigma} \tag{4.26}$$

$$\lim E\left(\frac{\sigma_m^r}{V_0}\right) = \frac{(\lambda\sigma)^r}{r!} e^{-\lambda\sigma} [2\pi r R^{-1} + \lambda R] \tag{4.27}$$

$$\lim E\left(\frac{N_m^r}{V_0}\right) = \frac{(\lambda\sigma)^r}{r!} e^{-\lambda\sigma}\Big[\frac{r(r-1)}{2} R\pi\sigma^{-2} + \pi r R\sigma^{-1}\lambda + \frac{\pi}{2} R\lambda^2 + \tag{4.28}$$

$$+ \frac{r(r-1)(r-2)}{48}\pi^4 R^3\sigma^{-3} + \frac{\pi^4 R^3}{48}\lambda^3 + \frac{\pi^4 r(r-1)R^3}{16}\lambda\sigma^{-2} + \frac{\pi^4}{16} r R^3\lambda^3\sigma^{-1}\Big]$$

unde $\sigma = \pi R^2$.

7) În aceeași ipoteză (4.25) din (2.30'), (2.38') rezultă:

$$\lim E\left(\frac{V_m^r}{V_0}\right) = \frac{(\lambda ab)^r}{r!} e^{-ab\lambda} \tag{4.29}$$

$$\lim E\left(\frac{\sigma_m^r}{V_0}\right) = \frac{(\lambda ab)^r}{r!} e^{-ab\lambda} [2r(a+b)(ab)^{-1} + \lambda(a+b)] \tag{4.30}$$

Scanned with OKEN Scanner

8) Cînd $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sînt perechi de plane paralele la distanţa b, facem ipoteza :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{\bar{H}_0} = \frac{\mu}{2} \tag{4.31}$$

unde K_0 se extinde la întreg spaţiul, din (4.25), (4.20) şi (2.45) rezultă :

$$\lim E\left(\frac{N_m^r}{V_0}\right) = \frac{(\pi\mu b)^r}{r!} e^{-\pi b\mu}\left[\frac{\pi r(r-1)(r-2)}{48} b^{-3} + \right. \tag{4.32}$$

$$\left. + \frac{\pi^4\mu^3}{48} + \frac{\pi^2 r(r-1)b^{-2}}{16} + \frac{\pi^3 r\mu^2 b^{-1}}{16}\right].$$

§5.5. FORMULELE LUI L. A. SANTALÓ

5.5.1. PRIMELE DOUĂ VALORI MEDII ALE MĂSURII UNEI MULŢIMI ALEATOARE

1) Introducere. H. E. Robbins prin formulele (2.1), (2.2), cap. IV, dă o metodă pentru calcularea primelor două valori medii ale măsurii unei mulţimi aleatoare X şi aplică aceste formule pentru a găsi dispersia măsurii reuniunii de intervale pe o dreaptă (2.11′) cap. IV.

J. Bronowski şi J. Neyman §4, cap. IV, întrebuinţînd alte metode determină dispersia corespunzătoare cînd mulţimea aleatoare X este o reuniune de intervale din plan iar H. E. Robbins, rezolvă problema corespunzătoare pentru cercuri din plan [59].

Folosind formulele (2.1) şi (2.2), cap. IV, date de H. E. Robbins, L. A Santaló, rezolvă următoarele probleme [63] :

a) Fie R un dreptunghi dat de mulţimea punctelor (x, y) astfel ca $0 \leqslant x \leqslant A_1$, $0 \leqslant y \leqslant A_2$ şi fie dreptunghiul R' determinat de punctele (x, y) unde $-\delta \leqslant x \leqslant A_1 + \delta$, $-\delta \leqslant y \leqslant A_2 + \delta$, $\delta > 0$. Se notează cu ρ un dreptunghi de dimensiuni fixe, $a \times b$, dar de *poziţie aleatoare* în plan.

Poziţia lui ρ va fi determinată de coordonatele (x, y) ale centrului său P şi de unghiul φ dintre latura de lungime a şi axa Ox. Se presupune $\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant \min(A_1, A_2, \delta)$. Fie N un număr fix de dreptunghiuri ρ alese independent [45], notîndu-se cu X intersecţia dintre reuniunea acestor N dreptunghiuri de poziţie aleatoare şi dreptunghiul de poziţie fixă R se vor calcula primele două valori medii ale măsurii lui X.

b) Fie R un interval n dimensional care constă din mulţimea tuturor punctelor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ astfel ca $0 \leqslant x_i \leqslant A_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ şi $R' \supset R$, pentru care $-\delta \leqslant x_i \leqslant A_i + \delta$, $\delta > 0$. Fie N un număr fix de sfere, n dimensionale cu raza r $(2r \leqslant \min(A_i, 2\delta)$ alese în mod independent, [45], cu densitatea de probabilitate pentru centrele fiecărei n — sfere, constantă, egală cu $\frac{1}{R'}$ în R' şi zero în afara acestui interval.

Notîndu-se cu X intersecţia dintre reuniunea celor n sfere, de poziţie aleatoare cu intervalul de poziţie fixă R, se determină primele două momente ale măsurii lui X, generalizîndu-se rezultatele lui H. E. Robbins în plan.

2) Formule ajutătoare. a) Fie K o figură plană, convexă, nedeformabilă, de poziţie aleatoare în plan. Poziţia lui K poate fi determinată prin coordonatele (x, y)

Scanned with OKEN Scanner

ale unui punct P fix din K şi unghiul φ care măsoară rotaţia lui K în jurul lui P. Se vor numi x, y, φ coordonatele lui K. Măsura unei mulţimi de figuri congruente cu K este definită prin integrala formei diferenţiale

$$dK = dx \wedge dy \wedge d\varphi \tag{5.1}$$

Ţinînd seama de definiţia măsurii cinematice, măsura mulţimii de figuri congruente cu K nu depinde de punctul particular P ales pentru a determina poziţia lui K. Din (1.1), cap. IV, măsura mulţimii figurilor convexe K, care conţin în interior un punct fix Q are valoarea $2\pi F$, unde F înseamnă aria lui K, adică

$$\int_{Q \in K} dK = 2\pi F \tag{5.2}$$

Fie P_1 şi P_2 două puncte şi l distanţa $P_1P_2 = l$. Măsura mulţimii figurilor congruente cu K, fiecare din figuri conţinînd *amîndouă* punctele P_1, P_2 în interior, va fi o funcţie $\mu(K, l)$. Dacă d este diametrul lui K, avem $\mu(K, l) = 0$, dacă $l \geqslant d$.

b) Exemplu. α) Fie K un dreptunghi ρ cu dimensiunile fixe $a \times b$ şi presupunem $a \leqslant b$. Diametrul lui ρ este $\sqrt{a^2 + b^2}$. Fie $P(x, y)$ centrul lui ρ şi φ unghiul pe care îl formează latura de lungime b cu segmentul P_1P_2 de lungime l. Considerînd φ constant, ca să existe o poziţie a lui ρ care să conţină segmentul P_1P_2 în interior, este necesar:

$$a - l \sin\varphi \geqslant 0; \qquad b - l\cos\varphi \geqslant 0$$

şi în acest caz aria descrisă de către centrul P corespunzătoare tuturor acestor poziţii are valoarea

$$(a - l\sin\varphi) \cdot (b - l\cos\varphi)$$

Integrîndu-se pentru toate valorile posibile ale lui φ se obţine:

$$\mu(\rho, l) = 4 \int_{\arccos\left(\frac{b}{l}\right)_1}^{\arcsin\left(\frac{b}{l}\right)_1} (a - l\sin\varphi)(b - l\cos\varphi)\,d\varphi \tag{5.3}$$

unde se defineşte

$$[x]_1 = \begin{cases} x & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 1 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

Se obţine

$$\mu(\rho, l) = \begin{cases} 2\pi ab - 4l(a+b) + 2l^2, & \text{dacă } l \leqslant a < b \\ 4ab \arcsin\frac{a}{l} + b\sqrt{l^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} - bl, & \text{dacă } a \leqslant l < b \\ 4ab\left(\arcsin\frac{a}{l} - \arccos\frac{b}{l}\right) + 4b\sqrt{l^2 - a^2} + \\ + 4a\sqrt{l^2 - b^2} - 2(a^2 + b^2) - 2l^2, & \text{dacă } a \leqslant b \leqslant l \end{cases} \tag{5.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

β) Fie dreptunghiul R determinat de mulțimea punctelor (x, y), unde $0 \leqslant x \leqslant A_1$, $0 \leqslant y \leqslant A_2$ și fie dreptunghiul $R' \supset R$, care constă din punctele (x, y) astfel ca $-\delta \leqslant x \leqslant A_1 + \delta$, $-\delta \leqslant y \leqslant A_2 + \delta$; $\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant \min(A_1, A_2, \delta)$.

Se consideră mulțimea dreptunghiurilor ρ, a căror centre aparțin lui R' și care *nu conțin* pe P_1 sau P_2; P_1 și P_2 fiind două puncte fixe care aparțin lui R. Fie $l = P_1P_2$; din (5.2) și din definiția lui $\mu(\rho, l)$, măsura mulțimii dreptunghiurilor ρ care nu conțin pe P_1 sau P_2 este:

$$2\pi R' - 2 \cdot 2\pi\rho + \mu(\rho, l) \tag{5.5}$$

unde $R' = (A_1 + 2\delta)(A_2 + 2\delta)$ iar $\rho = ab$.

γ) Fie K o figură plană convexă de poziție fixă. Presupunem K translatată la distanța l în direcția θ și fie $F(K, l, \theta)$ aria intersecției lui K cu figura translatată. Evident $F(K, l, \theta) = 0$ dacă $l \geqslant d$, unde d este diametrul lui K. Se va considera

$$\Phi(K, l) = \int_0^{2\pi} F(K, l, \theta)\mathrm{d}\theta \tag{5.6}$$

De exemplu, dacă K este dreptunghiul de laturi A_1, A_2 folosind notația:

$$[x] = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

avem

$$F(R, l, \theta) = [A_1 - l\sin\theta][A_2 - l\cos\theta] \tag{5.7}$$

În cazul cînd $l \leqslant \min(A_1, A_2)$, din (5.7), aplicînd (5.6) și (5.4) se obține

$$\Phi(R, l) = 2\pi A_1A_2 - 4l(A_1 + A_2) + 2l^2 \tag{5.8}$$

c) α). Fie $S_{n,r}$ o n-dimensională sferă de rază r; tot cu $S_{n,r}$ se va nota *volumul* acestei sfere. După cum este cunoscut,

$$S_{n,r} = \frac{(\pi r^2)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \tag{5.9}$$

Dacă $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este centrul sferei $S_{n,r}$, măsura elementară pentru sfere este forma diferențială

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \tag{5.10}$$

Măsura mulțimii sferelor $S_{n,r}$ în care fiecare conține un punct fix Q în interior are valoarea:

$$\int_{Q \in S_{n,r}} \mathrm{d}P = S_{n,r} \tag{5.11}$$

unde $S_{n,r}$ este dat de (5.9).

β) Măsura $\mu(S_{n,r}, l)$ a mulțimii sferelor $S_{n,r}$ în care fiecare conține în interior un segment de lungime $l (l \leqslant 2r)$, este egală cu volumul intersecției a două

Scanned with OKEN Scanner

sfere $S_{n,r}$ a căror centre sînt extremităţile segmentului de lungime l. Astfel $\mu(S_{n,r}, l)$ este egal cu dublul volumului segmentului de n — sferă de rază r şi unghi $\alpha = \arccos \frac{l}{2r}$.

Se va nota volumul acestui segment de sferă cu $S_{n,r}(\alpha)$.

Calculul lui $S_{n,r}(\alpha)$. Intersecţia unei sfere n dimensionale cu un hiperplan la distanţa x de centrul său este o sferă $(n-1)$ dimensională de rază $r' = \sqrt{r^2 - x^2}$. Volumul acestei sfere $(n-1)$ dimensionale $S_{n-1,r'}$ este dat de formula generală (5.9).

Volumul segmentului sferic va fi:

$$S_{n,r}(\alpha) = \int_h^r S_{n-1,r'}\, dx, \quad \text{unde } h = r\cos\alpha. \tag{5.11'}$$

Punînd $x = r\cos\theta$ şi înlocuind $S_{n-1,r'}$ expresia corespunzătoare dată de (5.9) se obţine:

$$S_{n,r}(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} r^n}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_0^\alpha \sin^n \theta d\theta = rS_{n-1,r} \int_0^\alpha \sin^n \theta d\theta \tag{5.11''}$$

Ca urmare,

$$\mu(S_{n,r}, l) = 2S_{n,r}(\alpha) = 2rS_{n-1,r} \int_0^\alpha \sin^n \theta d\theta \tag{5.12}$$

unde $\alpha = \arccos \frac{l}{2r}$.

Cum pentru n par

$$\int_0^\alpha \sin^n \theta d\theta = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2} \arccos\frac{l}{2r} - \tag{5.13}$$

$$- \frac{l}{2r}\left[\frac{1}{n}\left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{n-1}{n(n-2)}\left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3\cdot 1}{n(n-2)\ldots 4\cdot 2}\left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

iar pentru n impar

$$\int_0^\alpha \sin^n \theta d\theta = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{n(n-2)\ldots 5\cdot 3} - \frac{l}{2r}\left[\frac{1}{n}\left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} + \right. \tag{5.14}$$

$$\left. + \frac{n-1}{n(n-2)}\left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 5.3}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, pentru $n = 2, 3$ avem

$$\mu(S_{2,r},\ l) = 4r^2 \int_0^{\alpha} \sin^2 \theta \mathrm{d}\theta = 2r^2 \arccos \frac{l}{2r} - \frac{1}{2} l(4r^2 - l^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.15}$$

$$\mu(S_{3,r},\ l) = 2\pi r^3 \int_0^{\alpha} \sin^3 \theta \mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi r^2 l + \frac{\pi l^3}{12} \tag{5.16}$$

d) Generalizarea formulei (5.8) *în spațiul euclidian n dimensional*

Fiecărei direcții din spațiul n dimensional, îi corespunde un punct pe sfera unitate n-dimensională, adică extremitatea razei paralelă cu direcția dată.

Ecuațiile parametrice ale sferei

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1 \tag{5.16'}$$

sînt următoarele:

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = \cos \varphi_1 \\
&\xi_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
&\xi_3 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3\,;\ 0 \leqslant \varphi_i \leqslant \pi\,;\ i = 1,2,\ldots n-2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\xi_{n-1} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}\,;\ 0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi \\
&\xi_n = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Elementul de arie al sferei n dimensionale (5.16') este:

$$\mathrm{d}\sigma = \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-2} \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\varphi_{n-1} \tag{5.18}$$

O direcție în spațiul n dimensional poate fi dată de către $(n-1)$ parametrii $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Dîndu-se intervalul n dimensional R, care constă din toate punctele $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ astfel că $0 \leqslant x_i \leqslant A_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și presupunem că R este *translatat* la distanța $l (l \leqslant \min(A_1, A_2, \ldots, A_n))$ în direcția $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$, intersecția intervalului translatat cu R este un nou interval de volum:

$$\prod_{i=1}^{n} (A_i - x_i), \text{ unde } x_i = l\xi_i,$$

ξ_i fiind dați de (5.17).

Se caută evaluarea integralei:

$$\Phi(R,\ l) = \int_{E_n} \prod_{i=1}^{n} (A_i - x_i)\mathrm{d}\sigma \tag{5.19}$$

extinsă la suprafața E_n a sferei n dimensionale de rază unitate.

Scanned with OKEN Scanner

Aria frontierei sferei m — dimensionale de rază unitate este dată de formula :

$$E_m = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \tag{5.20}$$

Din motive de simetrie, coeficienţii tuturor produselor $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3} \ldots A_{i_{n-k}}$ au aceeaşi valoare :

$$a_k = (-1)^k \int_{E_n} x_1 \cdot x_2 \ldots x_k d\sigma$$

Integrala extinsă pe întreaga suprafaţă E_n este egală cu integrala extinsă pe porţiunea pentru care $\xi_i \geqslant 0$, înmulţită cu 2^n.

Ţinînd seamă de (5.17) şi (5.18), pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$, avem :

$$a_k = (-1)^k 2^k l^k E_{n-k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+k-3}\varphi_1 \cos\varphi_1 \sin^{n+k-5}\varphi_2 \cdot \tag{5.21}$$

$$\cdot \cos\varphi_2 \ldots \sin^{n-k-1}\varphi_k \cos\varphi_k \, d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \wedge \ldots \wedge d\varphi_k =$$

$$= (-1)^k \frac{2^k l^k E_{n-k}}{(n+k-2)(n+k-4)\ldots(n-k)}$$

Dacă $k = n$, atunci

$$a_n = (-1)^n 2^n l^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-3}\varphi_1 \cos\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1} d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_{n-1} = \tag{5.22}$$

$$= \frac{(-1)^n 2^n l^n}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4 \cdot 2}$$

Rezultă formula generală :

$$\Phi(R, l) = A_1 A_2 \ldots A_n E_n + \frac{(-1)^n 2^n l^n}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4 \cdot 2} + \tag{5.23}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}} A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_{n-k}} \frac{2^k l^k E_{n-k}}{(n+k-2)(n+k-4)\ldots(n-k)} \right)$$

Pentru $n = 2$ se obţine (5.8) iar pentru $n = 3$:

$$\Phi(R, l) = 4\pi A_1 A_2 A_3 - l^3 - 2\pi(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3)l + \tag{5.24}$$

$$+ \frac{8l^2}{3}(A_1 + A_2 + A_3)$$

Scanned with OKEN Scanner

3) *Rezolvarea primei probleme* (1.a). *a)* Notăm prin Y mulțimea punctelor din R care nu aparțin lui X. Deci:

$$X \cup Y = R \tag{5.25}$$

Se folosește aceeași notație pentru mulțime și măsura respectivă. Folosind formula (2.4), cap. IV a lui H. E. Robbins se obțin valorile medii:

$$M(Y) = R\left(1 - \frac{\rho}{R'}\right)^N \tag{5.26}$$

$$M(X) = R\left\{1 - \left(1 - \frac{\rho}{R'}\right)^N\right\} \tag{5.26'}$$

unde

$$R = A_1 A_2;\ R' = (A_1 + 2\delta)(A_2 + 2\delta);\quad \rho = ab \tag{5.26''}$$

b) Determinarea momentelor de ordinul doi. Fie x_i, y_i, φ_i, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ coordonatele celor N dreptunghiuri ρ și fie

$$\mathrm{d}\rho_i = \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i \wedge \mathrm{d}\varphi_i,\ i = 1, 2, \ldots, N \tag{5.27}$$

iar $P(x, y)$ și $P_0(x_0, y_0)$ două puncte care aparțin lui R, de unde:

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y;\qquad \mathrm{d}P_0 = \mathrm{d}x_0 \wedge \mathrm{d}y_0 \tag{5.27'}$$

Se consideră integrala multiplă:

$$J = \int \frac{\mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}P_0 \wedge \mathrm{d}\rho_1 \wedge \mathrm{d}\rho_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\rho_N}{(2\pi R')^N} \tag{5.28}$$

extinsă pe mulțimea dreptunghiurilor ρ_i (congruente cu ρ) astfel că x_i, y_i aparțin lui R', $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 2\pi$, și care dreptunghiuri ρ_i nu conțin P sau P_0. Astfel domeniul de integrare al lui J este definit prin:

$$-\delta \leqslant x_i \leqslant A_i + \delta;\ -\delta \leqslant y_i \leqslant A_2 + \delta;\ 0 \leqslant \varphi_i \leqslant 2\pi \tag{5.28'}$$

$$P \in R;\ P_0 \in R;\ P \notin \rho_i;\ P_0 \notin \rho_i (i = 1, 2, \ldots, N)$$

Considerăm întîi, ρ_i fixe, iar P și P_0 parcurg în mod independent mulțimea de puncte Y. Urmează:

$$J = \int\limits_{(x_i,\, y_i) \in R'} \frac{Y^2 \mathrm{d}\rho_1 \wedge \mathrm{d}\rho_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\rho_N}{(2\pi R')^N} = M(Y^2) \tag{5.28''}$$

Inversînd ordinea de integrare, ceea ce este posibil în acest caz, se mențin P și P_0 fixe iar pozițiile dreptunghiurilor ρ_i sînt astfel ca să *nu* conțină P sau P_0. Notînd cu l distanța $P\,P_0$, din (5.5) rezultă:

$$J = \int\limits_{P \in R, P_0 \in R} \left|1 - \frac{4\pi\rho - \mu(\rho, l)}{2\pi R'}\right|^N \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}P_0 \tag{5.29}$$

Pentru calculul integralei precedente se consideră $J = J_1 + J_2$, după cum $0 \leqslant l \leqslant d$ sau $d \leqslant l \leqslant D$, unde $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ și $D = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd $0 \leqslant l \leqslant d$ se introduc noi variabile de integrare l, θ prin relaţiile:

(5.29′) $$x_0 = x + l\cos\theta\,; \quad y_0 = y + l\sin\theta$$

Ţinînd seamă că determinantul funcţional

$$\frac{D(x, y, x_0, y_0)}{D(x, y, l, \theta)} = l$$

urmează:

(5.29″) $$J_1 = \int\left(1 - \frac{4\pi\rho - \mu(\rho, l)}{2\pi R'}\right)^N l\,dl \wedge dP \wedge d\theta$$

În această integrală punctul P poate varia pe intersecţia dintre R şi figura obţinută din translaţia lui R la distanţa l în direcţia θ; astfel integrarea în raport cu dP dă funcţia $F(R, l, \theta)$ definită la punctul 2); ţinînd seamă de (5.6) se obţine:

(5.30) $$J_1 = \int_0^d \left(1 - \frac{4\pi\rho - \mu(\rho, l)}{2\pi R'}\right)^N \Phi(R, l) l\,dl$$

unde $\mu(\rho, l)$ este dat de (5.4) iar $\Phi(R, l)$ de (5.8).

Pentru a se evalua J_2, se ţine seama că pentru $d \leqslant l \leqslant D$, $\mu(\rho, l) = 0$ şi avem:

(5.30′) $$J_2 = \left(1 - \frac{2\rho}{R'}\right)^N \int_{d \leqslant l \leqslant D} dP \wedge dP_0 =$$

$$= \left(1 - \frac{2\rho}{R'}\right)^N \left\{ \int_{0 \leqslant l \leqslant D} dP \wedge dP_0 - \int_{0 \leqslant l \leqslant d} dP \wedge dP_0 \right\}$$

Urmează:

(5.30″) $$\int_{0 \leqslant l \leqslant D} dP \wedge dP_0 = R^2$$

şi cu schimbarea de variabile (5.29′) şi din formula (5.8) găsim că

(5.30‴) $$\int_{0 \leqslant l \leqslant d} dP \wedge dP_0 = \int_0^d \Phi(R, l) l\,dl = \pi A_1 A_2 d^2 -$$

$$- \frac{4}{3}(A_1 + A_2) d^3 + \frac{d^4}{4}$$

Din (5.28″), (5.30), (5.30″) şi (5.30‴) se obţine:

(5.31) $$M(Y^2) = \int_0^d \left(1 - \frac{4\pi\rho - \mu(\rho, l)}{2\pi R'}\right)^N \Phi(R, l)\,dl +$$

$$+ \left(1 - \frac{2\rho}{R'}\right)^N \left[R^2 - \pi A_1 A_2 d^2 + \frac{4}{3}(A_1 + A_2) d^3 - \frac{d^4}{4}\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\rho = ab$, $R = A_1A_2$; $R' = (A_1 + 2\delta)(A_2 + 2\delta)$; $\mu(\rho, l)$ este dat de (5.4) şi $\Phi(R, l)$ de (5.8).

Dispersia lui X şi Y rezultă din (5.25), (5.26), (5.26') şi (5.31). Avem:

$$\sigma_X^2 = M(X^2) - M^2(X) = M(Y^2) - M^2(Y),$$

deci:

$$\sigma_X^2 = \int_0^d \left(1 - \frac{4\pi\rho - \mu(\rho, l)}{2\pi R'}\right)^N \Phi(R, l) l\,dl + \tag{5.32}$$

$$+ \left(1 - \frac{2\rho}{R'}\right)^N \left[R^2 - \pi A_1 A_2 d^2 + \frac{4}{3}(A_1 + A_2)d^3 - \frac{d^4}{4}\right] - R^2\left(1 - \frac{\rho}{R'}\right)^{2N}$$

4) *Rezolvarea problemei a doua* (1.b). Se notează cu X *intersecţia reuniunii* celor N, n — dimensionale sfere $S_{n,r}$ de rază r cu intervalul n dimensional R. Notîndu-se cu Y mulţimea punctelor din R care nu aparţin lui X, avem:

$$X \cup Y = R \tag{5.33}$$

Folosind formula lui Robbins (2.1), cap. IV, avem:

$$M(Y) = R\left(1 - \frac{S_{n,r}}{R'}\right)^N \tag{5.33'}$$

$$M(X) = R\left[1 - \left(1 - \frac{S_{n,r}}{R'}\right)^N\right] \tag{5.33''}$$

unde $R = \prod_{i=1}^{n} A_i$; $R' = \prod_{1}^{n} (A_i + 2\delta)$ şi $S_{n,r}$ este dat de (5.9).

Fie $Q_1(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1)$ şi $Q_2(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2)$ două puncte care aparţin lui R şi $P_i(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$ centrele celor N sfere $S_{n,r}$.

Notăm măsurile elementare:

$$dQ_i = dy_1^i \wedge dy_2^i \wedge \ldots \wedge dy_n^i; \quad (i = 1, 2) \tag{5.34}$$

$$dP_i = dx_1^i \wedge dx_2^i \wedge \ldots \wedge dx_n^i; \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

şi se consideră integrala:

$$J = \int \frac{dQ_1 \wedge dQ_2 \wedge dP_1 \wedge dP_2 \wedge \ldots \wedge dP_N}{R'^N} \tag{5.34'}$$

extinsă la domeniul definit prin

$$Q_1 \in R,\ Q_2 \in R,\ P_i \in R',\ \overline{Q_1P_i} > r,\ \overline{Q_2P_i} > r$$

Fixînd $P_1, P_2, \ldots, P_n$; punctele Q_1, Q_2 variază în mod independent pe mulţimea Y. Deci

$$J = \int_{P_i \in R'} \frac{Y^2 dP_1 \wedge dP_2 \wedge \ldots \wedge dP_n}{R'^N} = M(Y^2) \tag{5.34''}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, dacă se fixează Q_1 și Q_2, integrînd în raport cu dP_i, se obține:

(5.34''') $$R' - 2S_{n,r} + \mu(S_{n,r}, l)$$

unde $\mu(S_{n,r}, l)$ este dat de (5.12) iar $l = \overline{Q_1Q_2}$.

Deci avem:

(5.35) $$J = \int\limits_{Q_1 \in R, Q_1 \in R} \left(1 - \frac{2S_{n,r} - \mu(S_{n,r}, l)}{R'}\right)^N dQ_1 \wedge dQ_2$$

După cum $0 \leqslant l \leqslant 2r$ sau $2r \leqslant l \leqslant D$, unde $D = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}$ avem $J = J_1 + J_2$.

Pentru calculul integralei J_1, $(0 \leqslant l \leqslant 2r)$, introducem noi variabile de integrare $l, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ prin relațiile:

(5.35') $$y_i = y_i^1 + l\xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

unde ξ_i sînt dați de (5.17). Cum determinantul funcțional

(5.35'') $$\frac{D(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1; y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2)}{D(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1; l, \varphi_1, \ldots \varphi_{n-1})} = l^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2}$$

rezultă:

(5.35''') $$dQ_1 \wedge dQ_2 = l^{n-1}\, dQ_1 \wedge d\sigma \wedge dl$$

unde $d\sigma$ înseamnă elementul de arie al sferei unitate n-dimensionale, dat de (5.18).

Astfel avem:

(5.36) $$J_1 = \int\limits_0^{2r} \left(1 - \frac{2S_{n,r} - \mu(S_{n,r}, l)}{R'}\right)^N \Phi(R, l) l^{n-1}\, dl$$

unde $\Phi(R, l)$ este dat de (5.23).

Dacă $2r \leqslant l \leqslant D$; $\mu(S_{n,r}, l) = 0$ și avem

(5.36') $$J_2 = \left(1 - \frac{2S_{n,r}}{R'}\right)^N \int\limits_{2r \leqslant l \leqslant D} dQ_1 \wedge dQ_2 =$$

$$= \left(1 - \frac{2S_{n,r}}{R'}\right)^N \left\{ \int\limits_{0 \leqslant l \leqslant D} dQ_1 \wedge dQ_2 - \int\limits_{0 \leqslant l \leqslant 2r} dQ_1 \wedge dQ_2 \right\}$$

Cum

(5.36'') $$\int\limits_{0 \leqslant l \leqslant D} dQ_1 \wedge dQ_2 = R^2$$

Scanned with OKEN Scanner

iar prin schimbarea de variabile (5.35') avem:

$$(5.36''') \qquad \int_{0\leqslant l\leqslant 2r} dQ_1 \wedge dQ_2 = \int_0^{2r} \Phi(R, l) l^{n-1} dl$$

din (5.36), (5.36'), (5.36''), (5.36''') rezultă:

$$M(Y^2) = \int_0^{2r} \left(1 - \frac{2S_{n,r} - \mu(S_{n,r}, l)}{R'}\right)^N \Phi(R, l) l^{n-1}\, dl +$$

$$+ \left(1 - \frac{2S_{n,r}}{R'}\right)^N \left\{ R^2 - \frac{2^n r^n}{n} RE_n - (-1)^n \frac{2^{3n} r^{2n}}{2n(2n-2) \ldots 4 \cdot 2} - \right.$$

(5.37)

$$\left. - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}} A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_{n-k}} \frac{2^{n+2k} E_{n-k} r^{n+k}}{(n+k)(n+k-2) \ldots (n-k)} \right) \right\}$$

unde $R = \prod_{i=1}^{n} A_i$; $R' = \prod_{i=1}^{n} (A_i + \delta)$; $S_{n,r}$ este dat de (5.9);

E_m de (5.20); $\mu(S_{n,r}, l)$ de (5.12) și $\Phi(R, l)$ de (5.23).

În particular pentru $n = 2$ se obține valoarea dată de Robbins (§2. cap. IV), unde se folosesc (5.8), (5.15) și egalitățile $S_{2,n} = \pi r^2$, $E_1 = 2$.

Pentru $n = 3$ din (5.16), (5.24) și egalitățile $S_{3,r} = \frac{4}{3}\pi r^3$; $E_3 = 4\pi$; $E_2 = 2\pi$ urmează:

(5.37')

$$M(Y^2) = \int_0^{2r} \left\{ \left(1 - \frac{16\pi r^3 + 12\pi r^2 - \pi l^3}{12R'}\right)^N [4\pi R - l^3 - 2\pi(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3) l + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{3}(A_1 + A_2 + A_3) l^2] \right\} l^2\, dl +$$

$$+ \left(1 - \frac{8\pi R^3}{3R'}\right)^N \left[R^2 - \frac{32}{3}\pi R r^3 + 8\pi(A_1A_3 + A_2A_3 + A_1A_2) r^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{256}{15}(A_1 + A_2 + A_3) r^5 + \frac{32}{3} r^6 \right]$$

Din (5.33), (5.33') și 5.37') se obține:

$$\sigma_X^2 = M(X^2) - M^2(X) = M(Y^2) - M^2(Y)$$

5) *Observații.* În problema a doua se pot înlocui intervalele n dimensionale R și R' prin sfere concentrice n — dimensionale. Problema se rezolvă în felul următor:

Fie $S_{n,a}$ o sferă n — dimensională de poziție fixă și rază a și $S_{n,a+\delta}$ sfera concentrică, n — dimensională de rază $a + \delta$. Se notează tot cu $S_{n,a}$, $S_{n,a+\delta}$ volumul corespunzător.

Scanned with OKEN Scanner

Fie un număr fix N de sfere N — dimensionale cu raza $r(r \leqslant \min(a, \delta))$ alese în mod independent cu densitatea de probabilitate a centrului fiecărei sfere $S_{n,r}$ constantă și egală $1/S_{n,a+\delta}$ în $S_{n,a+\delta}$ și zero în afara acestei n — sfere. Se notează cu X intersecția reuniunii celor N sfere cu $S_{n,a}$. Se vor stabili formule pentru primele două momente ale măsurii lui X.

Se observă că în acest caz avem:

$$\Phi(S_{n,a}, l) = \mu(S_{n,a}, l)\ E_n = 2aS_{n-1,a}E_n \int_0^{\alpha} \sin^n \theta\, d\theta \tag{5.38}$$

unde $S_{n-1,a}$ este volumul sferei $(n-1)$ dimensionale de rază a și $\alpha = \arccos \frac{l}{2a}$.

Folosind aceeași metodă ca în paragraful precedent, se obțin formulele:

$$E(Y) = S_{n,a}\left(1 - \frac{S_{n,r}}{S_{n,a+\delta}}\right)^N \tag{5.38'}$$

$$E(X) = S_{n,a}\left\{1 - \left(1 - \frac{S_{n,r}}{S_{n,a+\delta}}\right)^N\right\} \tag{5.38''}$$

$$E(Y^2) = \int_0^{2r} \left[1 - \frac{2S_{n,r} - \mu(S_{n,r}, l)}{S_{n,a+\delta}}\right]^N \Phi(S_{n,a}, l) l^{n-1} dl + \tag{5.39}$$

$$+ \left(1 - \frac{2S_{n,r}}{S_{n,a+\delta}}\right)^N S_{n,a}^2 - \int_0^{2r} \Phi(S_{n,a}, l)\ l^{n-1} dl\Big]$$

unde $\Phi(S_{n,a}, l)$ este dat de (5.38).

— În particular, pentru $n = 2$, din (5.39), (5.15), ținînd seamă că:

$$\int \arccos(l/2a) l\, dl = \left(\frac{l^2}{2} - a^2\right) \arccos(l/2a) - \frac{l}{4}(4a^2 - l^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\int l^2(4a^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}\, dl = -\frac{l}{4}(4a^2 - l^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a^2(4a^2 - l^2)^{\frac{1}{2}} + 2a^4 \arcsin(l/2a) + C$$

rezultă:

(5.40)

$$E(Y^2) = 2\pi \int_0^{2r} \left[1 - \frac{2\pi r^2 - 2r^2 \arccos(l/2r) + \frac{l}{2}(4r^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi(a+\delta)^2}\right]^N \left[2a^2 \arccos(l/2a) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} l (4a^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}\right] l\, dl + \left[1 - \frac{2r^2}{(a+\delta)^2}\right]^N \left\{\pi^3 a^4 - 2\pi\left[2a^2(2r^2 - a^2) \arccos\left(\frac{r}{a}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \pi a^4 - 3a^2 r(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} + 2r(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - a^4 \arcsin\left(\frac{r}{a}\right)\right]\right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

— Dacă $n = 3$, din (5.38) și (5.16) rezultă :

$$(5.41)\quad E(Y^2) = 4\pi \int_0^{2r} \left[1 - \frac{16r^3 + 12r^2l - l^3}{16(a+\delta)^3}\right]^N \left(\frac{4}{3}\pi a^3 - \pi a^2 l + \frac{1}{12}\pi l^3\right) l^2 dl +$$

$$+ 4\pi\left[1 - \frac{2r^3}{(a+\delta)^3}\right]^N \left(\frac{4}{9}\pi a^6 - \frac{32}{9}\pi a^3 r^3 + 4\pi a^2 r^4 - \frac{8}{9}\pi r^6\right)$$

Din (5.38'), (5.38''), (5.39), (5.40) și relația

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X) = E(Y^2) - E^2(Y)$$

rezultă σ_X^2 și $E(X^2)$.

§5.6. ALTE APLICAȚII

1) Un segment orientat ω, de lungime s, poate fi definit în plan, prin originea sa $P(x, y)$, ce se presupune că are o repartiție Poisson de intensitate λ și unghiul Φ care-l face cu o direcție fixă ; Φ are o distribuție uniformă pentru $0 \leqslant \Phi < 2\pi$.

Lungimea s, poate fi considerată ca o variabilă aleatoare, cu densitatea de probabilitate $f(s)$, astfel ca :

$$(6.1)\quad \int_0^\infty f(s)ds = 1\,; \qquad \int_0^\infty sf(s)\,ds = E(s)$$

În ipotezele de mai sus, măsura elementară pentru mulțimi de segmente de drepte are expresia :

$$(6.2)\quad d\omega = f(s)\,ds \wedge dP \wedge d\Phi$$

sau

$$(6.2')\quad d\omega = f(s)\,ds \wedge dG \wedge dt$$

unde s-a notat $dP = dx \wedge dy$, elementul de arie în P, dG densitatea pentru drepte orientate ce conțin segmentul ω iar t înseamnă abscisa punctului P pe dreapta G.

Deoarece $d\omega$ se consideră în valoare absolută, ordinea factorilor poate fi oarecare. Lungimile și orientările segmentelor se consideră variabile aleatoare independente [45].

2) Din lucrările [58], [105], [68], se cunosc următoarele rezultate :

a) Notînd cu d distața dintre un punct din plan și cea mai apropiată extremitate a unui segment de dreaptă, avem :

$$P(d > u) = \exp(-\lambda H)\,;\ (0 \leqslant u < \infty)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde:

$$H = 2u^2\left\{\pi - \int_0^{2u}\left[\arccos(s/2u) - (s/2u)(1 - s^2/4u^2)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot f(s)ds\right\} \tag{6.3}$$

b) Valoarea medie a numărului ν de puncte, extremităţi ale segmentelor care aparţin mulţimii convexe K_0, de arie S_0 şi lungimea frontierei L_0 rezultă din formula:

$$E(\nu) = 2\lambda S_0 \tag{6.4}$$

Acest lucru rezultă din formulele [1.1], cap. IV, dacă se ţine seamă de ipotezele făcute.

c) Valoarea medie a numărului m de segmente de dreaptă, care intersectează mulţimea convexă K_0 are expresia:

$$E(m) = \lambda(S_0 + \pi^{-1}\, E(s)L_0) \tag{6.5}$$

Pentru aceasta se poate aplica formula:

$$\mu(K \cap K_0 \neq \emptyset) = 2\pi(S_0 + S) + L_0 L \tag{6.5'}$$

unde $S = 0$, $L = 2s$ şi apoi se calculează valoare medie ţinînd seama că lungimea segmentului s este variabilă aleatoare iar P din (6.2) are o repartiţie Poisson de intensitate λ.

d) Valoarea medie a numărului m^* de puncte de intersecţie dintre segmentele de linie şi o curbă rectificabilă de lungime L_0, aleasă la întîmplare în plan, este:

$$E(m^*) = 2\lambda\pi^{-1}E(s)L_0 \tag{6.6}$$

Valoarea medie (6.6) rezultă din (6.5) dacă $S_0 = 0$, $L_0 = 2L_0^*$.

e) În acelaşi mod ca în formula (6.5) se poate arăta că valoarea medie a numărului N de puncte de intersecţie *dintre segmente*, puncte situate în interiorul lui K_0, are expresia [58]:

$$E(N) = \pi^{-1}\lambda^2(E(s))^2 S_0 \tag{6.7}$$

f) Valoarea medie a lungimii totale, din interiorul lui K_0, a segmentelor care intersectează K_0 este dată de [58]:

$$E\,(\Sigma l_j) = \lambda E(s)\, S_0 \tag{6.8}$$

g) Notîndu-se cu δ distanţa dintre un punct Q din plan şi cel mai apropiat segment de linie, avem că:

$$P(\delta > u) = \exp(-\lambda H_1(u)),\ (0 \leqslant u < \infty) \tag{6.9}$$

unde

$$H_1(u) = \pi u^2 + 2uE(s) \tag{6.10}$$

3) Se consideră în planul euclidian grafuri formate dintr-un număr finit de puncte (vîrfuri), împreună cu segmente de linii (arce), care unesc anumite perechi de puncte distincte.

Scanned with OKEN Scanner

Dîndu-se un graf T_0 cu un număr V de vîrfuri şi h linii (arce) ce unesc aceste vîrfuri, se poate considera graful obţinut din acesta printr-o similitudine de factor s [105].

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_h$ sînt lungimile arcelor grafului T_0, atunci lungimea totală A a grafului T obţinut din T_0 printr-o similitudine de factor s este

$$A = s(a_1 + a_2 + \ldots + a_h) \tag{6.11}$$

Un graf T este definit în plan, prin unul din vîrfurile sale, de exemplu $P(x, y)$, factorul s şi o rotaţie Φ în jurul lui P. Vom considera mulţimi de grafuri independente astfel că P are distribuţia Poisson în plan cu intensitatea λ (numărul de puncte P, pe unitatea de arie), Φ este uniform distribuit pe intervalul, $0 \leqslant \Phi < 2\pi$, şi factorul s are densitatea de probabilitate ce verifică relaţiile (6.1).

Măsura elementară pentru grafurile T va fi:

$$\mathrm{d}T = f(s)\,\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}\Phi \tag{6.12}$$

α). Ţinînd seamă că valoarea medie a unei sume finite de variabile aleatoare este egală cu suma valorilor medii respective din (6.11) rezultă pentru grafurile T:

$$E(A) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_h)E(s) \tag{6.13}$$

β) Notînd cu ν numărul de vîrfuri ale unui graf T care sînt conţinute într-o mulţime convexă K_0 de arie S_0 şi lungimea frontierei L_0, ţinînd seamă de (6.4), rezultă:

$$E(\nu) = \lambda V S_0 \tag{6.14}$$

γ) Valoarea medie a numărului m^* de puncte de intersecţie dintre arcele grafurilor şi curba K_0 de lungime L_0, rezultă din (6.6), deci:

$$E(m^*) = 2\pi^{-1}\lambda\, E(A) L_0 \tag{6.15}$$

δ) Valoarea medie a lungimilor totale a arcelor din interiorul unei mulţimi convexe K_0 este dată de expresia:

$$E\,(\Sigma A_i) = \lambda E(A) S_0, \tag{6.16}$$

care generalizează formula (6.8).

ε) Valoarea medie a numărului N de puncte de intersecţie dintre arcele grafurilor, puncte situate în interiorul mulţimii convexe K_0, va fi dată de expresia:

$$E(N) = \pi^{-1}\lambda^2 [E(A)]^2 S_0 \tag{6.17}$$

generalizîndu-se formula (6.7).

4) În cazul cînd grafurile au măsura elementară:

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}\Phi \tag{6.18}$$

se pune problema determinării distribuţiei distanţei dintre un punct dat şi cel mai apropiat vîrf de graf.

Pentru aceasta, cu centrul în fiecare vîrf al grafului, se construieşte cîte un disc de rază u.

Scanned with OKEN Scanner

Fie D_i, $(i = 1, 2, \ldots, V)$ mulțimea acelor puncte din plan, care sînt acoperite exact de i discuri; se notează cu S_i aria respectivă.

Pentru u dat, unele S_i vor fi nule.

Dacă $S_1, S_2, \ldots, S_m$ sînt nenule iar $S_{m+1} = S_{m+2} = \ldots = S_V = 0$, notăm:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_m = \pi u^2 V - S_2 - 2S_3 - \ldots - (m-1) S_m \tag{6.19}$$

Considerînd n grafuri aleatoare (împreună cu discurile respective), fiecare avînd vîrful P în interiorul unui disc de rază R, probabilitatea ca un punct Q din discul de rază R, să fie acoperit exact de r_1 mulțimi D_1, r_2 mulțimi D_2, ..., r_m mulțimi D_m $(n \geqslant \Sigma r_i;\ i = 1, 2, \ldots, m)$, este dată de expresia:

$$p^{(n)}_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_m! (n - \Sigma r_i)!} \left(\frac{S_1}{S_0}\right)^{r_1} \ldots \left(\frac{S_m}{S_0}\right)^{r_m} \left(1 - \frac{S}{S_0}\right)^{n - \Sigma r_i} \tag{6.20}$$

adică o distribuție multinomială [50], unde $S_0 = \pi R^2$.

Dacă $n \to \infty$ și $R \to \infty$ astfel ca $\lim \frac{n}{S_0} = \lambda$ (număr de grafuri pe unitatea de arie), atunci probabilitatea (6.20) are limita:

$$p_{r_1 \ldots r_m} = \frac{(\lambda S_1)^{r_1}}{r_1!} \frac{(\lambda S_2)^{r_2}}{r_2!} \ldots \frac{(\lambda S_m)^{r_m}}{r_m!} \exp(-\lambda S) \tag{6.21}$$

care corespunde unui proces Poisson multiplu. Se spune că grafurile respective formează un proces Poisson de intensitate λ.

Astfel, fiind dat un proces Poisson de grafuri T congruente de intensitate λ, *probabilitatea ca distanța de la un punct Q la i vîrfuri a r_i grafuri* $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *să fie mai mică sau egală cu u* este dată de (6.21).

În particular, probabilitatea ca distanța dintre un punct Q și cel mai apropiat vîrf să fie mai mare ca u este:

$$P_{00\ldots0} = \exp(-\lambda S) \tag{6.22}$$

Funcția $S(u)$ este în general greu de calculat.

a) Dacă T este un segment de dreaptă de lungime a, atunci:

$$S = 2\pi u^2, \text{ dacă } a \geqslant 2u \tag{6.23}$$

$$S = 2u^2 \left\{\pi - \arccos\left(\frac{a}{2u}\right) + \frac{a}{2u}\left(1 - \frac{a^2}{4u^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\text{dacă } a < 2u$$

b) Dacă T este un dreptunghi cu laturile a, b, astfel ca $b \geqslant a$ atunci:

$$S = 4\pi u^2, \text{ dacă } 2u \leqslant a \tag{6.24}$$

$$S = 4u^2 \left[\pi - \arccos(a/2u) + \frac{a}{2u}\left(1 - \frac{a^2}{4u^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\text{dacă } a \leqslant 2u \leqslant b$$

Scanned with OKEN Scanner

$$S = 4u^2\left[\pi - \text{arc cos}\,(a/2u) - \text{arc cos}\,(b/2u) + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{2u}\left(1 - \frac{a^2}{4u^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2u}\left(1 - \frac{b^2}{4u^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\text{dacă } b < 2u \leqslant (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$S = 2u^2\left\{(3/2)\pi - \text{arc cos}\,(a/2\,u) - \text{arc cos}\,(b/2\,u) + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{2u}\left(1 - \frac{a^2}{4u^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2u}\left(1 - \frac{b^2}{4u^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{ab}{2u^2}\right\},$$

$$\text{dacă } (a^2 + b^2)^{1/2} < 2u$$

c) Dacă T este un triunghi echilateral de latură a, atunci:

$$S = 3\pi u^2 \text{ dacă } u \leqslant \frac{a}{2}$$

(6.25)
$$S = 6u^2 \arcsin\left(\frac{a}{2u}\right) + 3\,au\left(1 - \frac{a^2}{4u^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{dacă } \frac{a}{2} \leqslant u \leqslant a\sqrt{3}$$

$$S = \pi u^2 + 3u^2 \arcsin\,(a/2u) + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3}{2}\,au\left(1 - \frac{a^2}{4u^2}\right)^{1/2},$$

$$\text{dacă } (a/\sqrt{3}) \leqslant u.$$

5) *Distribuția distanței de la un punct dat, pînă la cel mai apropiat graf.*
Notăm cu $S^*(u)$, aria mulțimii punctelor cu proprietatea că distanța pînă la graful T este mai mică sau egală cu u.

Probabilitatea ca distanța de la un punct Q pînă la cel mai apropiat graf să fie mai mare sau egală cu u este $\exp(-\lambda S^*(u))$.

a) Dacă T este un segment de linie de lungime a, atunci:

(6.26)
$$S^*(u) = \pi u^2 + 2au$$

b) Dacă T este un dreptunghi de laturi a, b astfel ca $b \geqslant a$, atunci:

(6.27)
$$S^*(u) = 4(a + b)u + \pi u^2 - 4u^2 \text{ dacă } 2u \leqslant a$$

$$S^*(u) = 2(a + b)\,u + \pi u^2 + ab \text{ dacă } a < 2u$$

c) Dacă T este un triunghi echilateral de latură a, atunci:

(6.28)
$$S^*(u) = \pi u^2 - 3\sqrt{3}u^2 + 6au, \text{ dacă } u \leqslant a/2\sqrt{3}$$

$$S^*(u) = 3au + \pi u^2 + (\sqrt{3}/4)a^2, \text{ dacă } \frac{a}{2\sqrt{3}} < u$$

Scanned with OKEN Scanner

6) a) Fiind date două corpuri convexe, K_0, K din formula fundamentală cinematică, rezultă [79]:

$$\int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} dK = 8\pi^2(V_0 + V) + 2\pi(S_0\overline{H} + S\overline{H}_0) \tag{6.29}$$

unde V, S, $\overline{H}$ reprezintă respectiv volumul, aria frontierei, integrala curburii medii.

De asemenea sînt cunoscute formulele [79]:

$$\int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} V_1 dK = 8\pi^2 V_0 V \tag{6.30}$$

$$\int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} S_1 dK = 8\pi^2(V_0 S + S_0 V) \tag{6.31}$$

$$\int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} \overline{H}_1 dK = 8\pi^2(V_0\overline{H} + V\overline{H}_0) + \frac{\pi^4}{2} S_0 S \tag{6.32}$$

unde V_1, S_1, $\overline{H}_1$ sînt respectiv volumul, aria, integrala curburii medii pentru mulţimea convexă $K_0 \cap K$.

b) Dacă K este un cilindru C de secţiune normală σ şi perimetrul secţiunii δ, atunci formulele precedente devin [68]:

$$\int_{\{C \cap K_0 \neq \emptyset\}} dC = 2\pi(\pi S_0 + 4\pi\sigma + \overline{H}_0\delta) \tag{6.29'}$$

$$\int_{\{C \cap K_0 \neq \emptyset\}} V_1 dC = 8\pi^2 V_0 \sigma \tag{6.30'}$$

$$\int_{\{C \cap K_0 \neq \emptyset\}} S_1 dC = 8\pi^2(S_0\sigma + V_0\delta) \tag{6.31'}$$

$$\int_{\{C \cap K_0 \neq \emptyset\}} \overline{H}_1 dC = 2\pi^2\left(4\overline{H}_0\sigma + 4\pi V_0 + \frac{\pi^2}{4} S_0\delta\right) \tag{6.32'}$$

c) Dacă se ia drept K, mulţimea Y cuprinsă între două plane paralele, la distanţa b, atunci [68]:

$$\int_{\{Y \cap K_0 \neq \emptyset\}} dY = \overline{H}_0 + 2\pi b \tag{6.29''}$$

$$\int_{\{Y \cap K_0 \neq \emptyset\}} V_1\, dY = 2\pi V_0 b \tag{6.30''}$$

$$\int_{\{Y \cap K_0 \neq \emptyset\}} S_1 dY = 2\pi(2V_0 + S_0 b) \tag{6.31''}$$

$$\int_{\{Y \cap K_0 \neq \emptyset\}} \overline{H}_1 dY = \frac{\pi^3}{4} S_0 + 2\pi\overline{H}_0 b \tag{6.32''}$$

Scanned with OKEN Scanner

C_1). Considerîndu-se particule congruente cu K_0, de poziţie aleatoare în spaţiu (în raport cu măsura cinematică), cunoscîndu-se volumul total V_2, aria totală S_2, integrala curburii medii respective $\bar{H}_2$, numărul de particule N_2 care rezultă din intersecţia unui corp convex K, cu particulele, unde V, S, $\bar{H}$ sînt elementele corespunzătoare corpului convex K, de poziţie aleatoare, se cere determinarea mărimilor V_0, S_0, $\bar{H}_0$, adică volumul, aria frontierei şi integrala curburii medii pentru o particulă, precum şi numărul λ_0, al particulelor pe unitatea de volum.

Dacă se presupune că particulele se află în interiorul unei sfere, a cărei rază tinde către infinit, din formulele (6.29), (6.32) se obţine :

$$V_2 = \lambda_0 V_0 V, \quad S_2 = \lambda_0 (V_0 S + S_0 V)$$

de unde

(6.33) $$V_0 = \frac{V_2}{\lambda_0 V}$$

(6.34) $$S_0 = \frac{S_2 V - S V_2}{\lambda_0 V^2}$$

(6.35) $$\bar{H}_0 = \frac{V^2 \bar{H}_2 - \frac{\pi^2}{16} S V S_2 - \bar{H} V V_2 + \frac{\pi^2}{16} S^2 V_2}{\lambda_0 V^3}$$

Cum formula cinematică principală, dată de Blaschke, are forma :

(6.36) $$\int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} \chi(K_0 \cap K)\, dK = 8\pi^2 [V_0 \chi(K) + V \chi(K_0)] + 2\pi [S(K_0) \bar{H}(K) + S(K) \bar{H}(K_0)]$$

unde χ reprezintă caracteristica lui Euler-Poincaré respectivă, dacă K_0 se compune din n particule care nu se intersectează şi notînd cu N numărul particulelor din interiorul lui K, atunci $\chi(K_0 \cap K) = N$, iar formula (6.36) devine :

(6.37) $$\int_{\{K \cap K_0 \neq \emptyset\}} N\, dK = 8\pi^2 n (V_0 + V) + 2\pi n (S_0 \bar{H} + S \bar{H}_0)$$

unde V_0, S_0, $\bar{H}_0$ sînt elementele corespunzătoare unei particule. Urmează relaţia :

(6.38) $$N_2 = \lambda_0 \left[V_0 + V + \frac{1}{4\pi} (S_0 \bar{H} + S \bar{H}_0) \right]$$

Deci

(6.39) $$\lambda_0 = \frac{N_2}{V} - \frac{S \bar{H}_2}{V^2} + \frac{\pi S^2 S_2}{64 V^3} + \frac{S \bar{H} V_2}{2\pi V^3} - \frac{\bar{H} S_2}{4\pi V^2} - \frac{V_2}{V^2} - \frac{\pi S^3 V_2}{64 V^4}$$

Scanned with OKEN Scanner

C_2) În cazul cilindrilor, dacă se ține seamă de relațiile (6.29′) ÷ (6.32′) și de (6.36), rezultă următoarele formule integrale:

$$V_2 = \lambda_0 V_0;\ S_2 = \lambda_0\left(S_0 + \frac{V_0\delta}{\sigma}\right);\ \overline{H}_2 = \lambda_0\left(\overline{H}_0 + \frac{\pi V_0}{\sigma} + \frac{\pi^2 S_0}{16\sigma}\right);$$

(6.40)

$$N_2 = \lambda_0\left(\frac{S_0}{4\sigma} + \frac{\overline{H}_0\delta}{4\pi\sigma} + 1\right)$$

$V_2, S_2, \overline{H}_2, N_2$ fiind respectiv volumul, aria, integrala curburii medii, numărul particulelor, care rezultă din intersecția cilindrului C, cu particulele, pe unitatea de volum a cilindrului C.

Din relațiile precedente, rezultă:

$$V_0 = \frac{V_2}{\lambda_0}\ ;\quad S_0 = \frac{S_2}{\lambda_0} - V_2\frac{\delta}{\lambda_0\sigma}$$

(6.41)

$$\overline{H}_0 = \frac{1}{\lambda_0}\left(\overline{H}_2 - \frac{\pi V_2}{\sigma} - \frac{\pi^2\delta S_2}{16\sigma} + \frac{\pi^2 V_2\delta^2}{16\sigma^2}\right)$$

$$\lambda_0 = N_2 - \frac{S_2}{4\sigma} + \frac{V_2}{2\sigma^2} - \frac{\delta\overline{H}_2}{4\pi\sigma} + \frac{\pi\delta^2 S_2}{64\sigma^2} - \frac{\pi V_2\delta^3}{64\sigma^3}$$

C_3) Cînd K reprezintă mulțimea Y, atunci din (6.29″) — (6.32″), rezultă relațiile:

$$V_2 = \lambda_0 V_0 b;\ S_2 = \lambda_0(S_0 b + 2V_0),$$

(6.42)

$$\overline{H}_2 = \lambda_0\left(\overline{H}_0 b + \frac{\pi^2}{8}S_0\right),\quad N_2 = \lambda_0\left(b + \frac{\overline{H}_0}{2\pi}\right)$$

de unde se obține:

$$V_0 = \frac{V_2}{\lambda_0 b}\ ,\quad S_0 = \frac{S_2}{\lambda_0 b} - \frac{2V_2}{\lambda_0 b^2}$$

$$\overline{H}_0 = \frac{1}{\lambda_0}\left[\frac{\overline{H}_2}{b} - \frac{\pi^2 S_2}{8b^2} + \frac{\pi^2 V_2}{4b^3}\right].$$

$$\lambda_0 = \frac{N_2}{b} - \frac{\overline{H}_2}{2\pi b^2} + \frac{\pi S_2}{16b^3} - \frac{\pi V_2}{8b^4}$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 6

REPARTIȚII STATISTICE ALE DIAMETRELOR APARENTE REZULTATE PRIN INTERSECȚIA SUPRAFEȚELOR CIRCULARE CU REȚELE PLANE ALEATOARE. APLICAȚII PE SECȚIUNI SUBȚIRI DE ROCĂ.

§6.1. PROBLEME PRIVIND SECȚIUNILE SUBȚIRI. CARACTERISTICILE ALEATOARE ALE IMAGINILOR PARTICULELOR PE SECȚIUNI SUBȚIRI

În masa unei roci sînt încorporate „aleator" granule cu anumite proprietăți fizico-chimice.

O tehnică de analiză a lor se bazează pe prepararea unor „secțiuni subțiri" prin secționarea unor probe de rocă după planuri aleatoare. În plan granulele sînt secționate după suprafețe aproximativ circulare.

Cum granulele sînt dispuse aleator în masa rocii, planul de secțiune nu va tăia granulele neapărat prin centrul lor, astfel, încît, diametrele cercurilor în secțiune vor subestima diametrele reale ale sferelor corespunzătoare granulelor.

De asemenea, numărul de granule observate în secțiune va subestima numărul real existent în rocă.

În aceste condiții problema care se pune este ca pe baza observațiilor efectuate pe secțiunile subțiri de rocă să se estimeze diametrele reale ale granulelor precum și numărul de granule cuprinse în masa unei probe de rocă. De asemenea se vor determina erorile cu care se fac aceste estimații.

Rezolvarea problemelor de acest gen are implicații practice din cele mai utile:

— obținerea de informații suplimentare pentru cercetările geologice în zona din care au fost prelevate probele;

— estimarea rezervelor de substanță minerală în masa unei roci;

— stabilirea rețelelor raționale de cercetare sau explorare a zonelor mineralizate;

— prognoza caracteristicilor cantitative ale zonelor mineralizate.

Se vor studia în cele ce urmează repartițiile caracteristicilor particulelor cu estimarea parametrilor lor, precum și intervalele de încredere ale valorilor reale, atît pentru cazul mediilor omogene (particule cu aceleași dimensiuni) cît și pentru cazul amestecului de particule cu dimensiuni urmînd repartiții date (cazul mediilor neomogene).

Se au în vedere următoarele caracteristici ale particulelor în masa rocii: diametrul aparent și diametrul real, numărul de secțiuni circulare pe unitatea de suprafață a secțiunii subțiri; numărul de particule în unitatea de volum.

Dacă pe secțiune se așază aleator o rețea de linii paralele echidistante cu „a" și dacă se repetă procedeul de mai multe ori, se vor obține diferite mărimi ale coardelor rezultate prin intersecția conturului granulei cu o linie a rețelei. Vom numi aceste coarde „diametre aparente" și vom defini o variabilă aleatoare l a cărei lege de repartiție se studiază în capitolele următoare.

Scanned with OKEN Scanner

Cu toată importanţa practică a problemei, se cunosc pînă în prezent puţine preocupări pentru elaborarea unei teorii matematice adecvate de estimare care să conducă la o mai reală cunoaştere a fenomenului geologic.

În lucrarea [46] autorii se ocupă numai de problema determinării probabilităţilor de interceptare a particulelor cu reţele de linii paralele cu echidistanţă dată.

De fapt aceasta este o problemă de probabilităţi geometrice constînd, într-o exprimare generală, în studiul probabilităţilor de intersecţie a unor curbe sau suprafeţe mărginite cu reţele aleatoare de linii sau puncte.

§6.2. REPARTIŢIA CARACTERISTICILOR PARTICULELOR

În cele ce urmează se vor studia repartiţiile următoarelor caracteristici: diametrul aparent l; numărul n de secţiuni circulare pe unitatea de suprafaţă; numărul m de particule în unitatea de volum, aria S a secţiunilor, volumul V al particulelor.

6.2.1. REPARTIŢIA DIAMETRELOR APARENTE REZULTATE PRIN INTERSECŢIA UNUI CERC DE DIAMETRU D CU O REŢEA DE LINII PARALELE DE ECHIDISTANŢĂ „a"

Să considerăm o particulă a cărei secţiune orizontală este un cerc de diametru D (Fig. 6.2.1) şi de arie S.

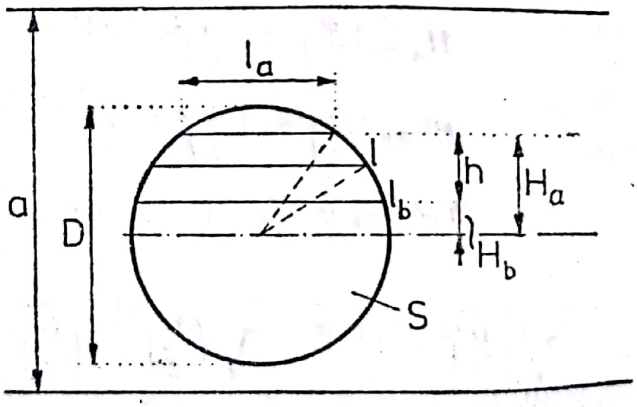

Fig. 6.2.1

Teorema 2.1. Dacă l este lungimea unui diametru aparent (coradă) rezultată prin intersecţia aleatoare a secţiunii circulare cu un sistem de linii paralele la echidistanţa „a", atunci densitatea de probabilitate a diametrelor aparente va fi

$$P(l) = \frac{1}{D} \cdot \frac{l}{\sqrt{D^2 - l^2}}\ ;\ l > 0\ ;\ a \leqslant D.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Probabilitatea ca cercul de diametru D să fie intersectat de o linie a rețelei de linii paralele de echidistanță „a" este

$$P(i) = \frac{D}{a} \text{ pentru } D < a \text{ și } P(i) = 1 \text{ pentru } D \geqslant a$$

Prin intersecție rezultă coarde de lungime l care pot fi considerate ca variabile aleatoare.

Vom determina mai întîi probabilitatea $P(l_a \leqslant l \leqslant l_b/i)$ ca lungimea coardei l să fie cuprinsă între două limite l_a și l_b cu $0 < l_a \leqslant l_b \leqslant D$, condiționată de intersecția (notată i) cu o linie a rețelei de linii paralele.

Cu notațiile din figură se demonstrează că

$$P(l_a \leqslant l \leqslant l_b/i) = \frac{2h}{D}$$

Într-adevăr, notînd cu E_{sup} și E_{inf} evenimentele ca o coardă de lungime l să se afle între l_a și l_b sau în partea superioară a cercului sau în cea inferioară, avem $P(E_{sup} \cup E_{inf} = P(E_{sup}) + P(E_{inf}) = 2P(E_{sup}) = 2P(E_{inf})$.

Cum $E_{sup} = \{l_a \leqslant l \leqslant l_b\}$ este echivalent cu evenimentul ca o coardă de lungime l să intersecteze un segment perpendicular de lungime h echivalent cu distanța dintre l_a și l_b, rezultă $P(E_{sup}) = \frac{h}{D}$ și deci

$$P(E_{sup} \cup E_{inf}) = \frac{2h}{D}$$

ceea ce trebuie arătat.

Pentru determinarea lui h se scriu mai întîi relațiile următoare pe baza notațiilor din figură

$$H_a^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{l_a}{2}\right)^2$$

$$H^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{l_b}{2}\right)^2$$

$$h = H_a - H_b$$

Rezultă

$$h = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{l_a}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{l_b}{2}\right)^2}$$

sau

$$h = \frac{D}{2}\left[\sqrt{1 - \left(\frac{l_a}{D}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{l_b}{D}\right)^2}\right].$$

Probabilitatea necondiționată ca $l_a \leqslant l \leqslant l_b$ va fi

$$P(l_a \leqslant l \leqslant l_b) = P(l_a \leqslant l \leqslant l_b/i)\,P(i) = \frac{D}{a}\left[\sqrt{1 - \left(\frac{l_a}{D}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{l_b}{D}\right)^2}\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a asigura cu probabilitatea 1 intersecția cercului cu sistemul de linii paralele se alege $a = D$.

Dacă $l_a = 0$ și $l_b = C \leqslant D$ atunci probabilitatea cumulată a diametrelor aparente l va fi

$$P(l \leqslant C) = \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{C}{D}\right)^2}\right]$$

Cum

$$P(l \leqslant C) = \int_0^C p(l)\,\mathrm{d}l$$

primitiva lui $p(l)$ este

$$F(l) = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{l}{D}\right)^2}$$

Prin derivare în raport cu l se obține densitatea de probabilitate a lungimii diametrelor aparente rezultate ca intersecție a cercului cu una din liniile paralele ale rețelei de echidistanță $a = D$; și anume

$$p(l) = \frac{\mathrm{d}F(l)}{\mathrm{d}l} = \frac{l/D^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{D}\right)^2}};\ 0 \leqslant l \leqslant D$$

sau

$$p(l) = \frac{1}{D} \cdot \frac{l}{\sqrt{D^2 - l^2}}$$

Într-adevăr $p(l)$ este densitatea de probabilitate deoarece

$$\int_0^D p(l)\,\mathrm{d}l = \frac{1}{D}\int_0^D \frac{l}{\sqrt{D^2 - l^2}}\,\mathrm{d}l = -\frac{1}{D}\sqrt{D^2 - l^2}\,\Big|_0^D = 1$$

Observație. În cazul particular $a = D = 1$ avem

$$p(l) = \frac{l}{\sqrt{1 - l^2}};\ 0 \leqslant l \leqslant 1$$

Consecință. Densitatea de probabilitate $p(l)$ este o funcție crescătoare pentru $0 \leqslant l \leqslant D$.

Demonstrație. Se calculează

$$\frac{\mathrm{d}p(l)}{\mathrm{d}l} = \frac{D}{(D^2 - l^2)^{3/2}}$$ și se observă că $\frac{\mathrm{d}p(l)}{\mathrm{d}l} \geqslant 0$

deoarece $D^2 - l^2 \geqslant 0$. Valorile limită ale lui $p(l)$ sînt

$$\lim_{l \to 0} p(l) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{l \to D} p(l) = +\infty$$

Scanned with OKEN Scanner

Consecință. Media și dispersia diametrelor aparente rezultate ca intersecție a unui cerc de diametru D cu o rețea de linii paralele echidistante cu $a = D$ sînt date de relațiile

$$E(l) = \frac{\pi}{4} D\,; \quad D^2(l) = D^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16} \right)$$

Demonstrație. Valoarea medie

$$E(l) = \int_0^D l p(l)\,dl$$

$$\int_0^D l p(l)\,dl = \frac{1}{D} \int_0^D \frac{l^2}{\sqrt{D^2 - l^2}}\,dl =$$

$$= \frac{1}{D} \left[-\frac{l\sqrt{D^2 - l^2}}{2} + \frac{D^2}{2} \arcsin \frac{l}{D} \right]_0^D = D \frac{\pi}{4}$$

Pentru dispersia

$$D^2(l) = E[(l - E(l))^2] = E(l^2) - [E(l)]^2$$

dar

$$E(l^2) = \int_0^D l^2 p(l)\,dl = \frac{1}{D} \int_0^D \frac{l^3}{\sqrt{D^2 - l^2}}\,dl =$$

$$= \frac{1}{D} \left| -\frac{2D^2 + l^2}{3} \sqrt{D^2 - l^2} \right|_0^D = \frac{2}{3} D^2$$

Prin urmare

$$D^2(l) = \frac{2}{3} D^2 - \frac{\pi^2}{16} D^2 = D^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16} \right)$$

Observație. În cazul particular $a = D = 1$ avem

$$E(l) = \frac{\pi}{4}$$

$$D^2(l) = \frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}$$

Vom demonstra în continuare o teoremă pentru cazul particulelor de diferite mărimi amestecate aleator.

Fie $\mathfrak{D}$ mulțimea cercurilor cu diametrul variabilă aleatoare D amestecate în proporții cunoscute $p(D)$. Cercurile din mulțimea $\mathfrak{D}$ corespund particulelor secționate printr-un plan de secționare.

Fie $p(l/D)$ densitatea de probabilitate a diametrelor aparente aleatoare rezultate din intersecția unei rețele de linii paralele la echidistanța $a = D$ cu cercurile de diametru D.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.2. Densitatea de probabilitate necondiționată a diametrelor aparente l ale amestecului de cercuri este dată de relația

$$p(l) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D_i} \cdot \frac{lp(D_i)}{\sqrt{D_i^2 - l^2}}$$

unde D_i sînt mărimile diametrelor cercurilor $i = 1, 2, \ldots, n$ iar $p(D_i)$ procentul cunoscut de cercuri de diametru D_i

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p(D_i) = 1\right)$$

Demonstrație. Conform teoremei 2.1 avem

$$p(l/D) = \frac{1}{D} \cdot \frac{l}{\sqrt{D^2 - l^2}} \quad \text{cu } 0 \leqslant l \leqslant D$$

pentru orice $D \in \mathfrak{D}$

Simbolic, densitatea de probabilitate necondiționată a diametrelor aparente ale amestecului de cercuri va fi

$$p(l) = \int_{D \in \mathfrak{D}} p(l/D)p(D)\mathrm{d}l$$

Notînd cu $\{D_i;\ p(D_i)\}$ distribuția empirică a diametrelor cercurilor, cu $i = 1, 2, \ldots, n$; putem scrie

$$p(l/D_i) = \frac{1}{D_i} \cdot \frac{l}{\sqrt{D_i^2 - l^2}};\ 0 \leqslant l \leqslant D_i$$

Avem

$$p(l) = \sum_{i=1}^{n} \frac{lp(D_i)}{D_i\sqrt{D_i^2 - l^2}} \quad \text{cu} \sum_{i=1}^{n} p(D_i) = 1$$

Într-adevăr

$$\int_0^{D_i} p(l)\mathrm{d}l = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(D_i)}{D_i} \int_0^{D_i} \frac{l}{\sqrt{D_i^2 - l^2}}\mathrm{d}l = \sum_{i=1}^{n} p(D_i) = 1$$

Consecință. Media și dispersia diametrelor aparente ale amestecului de cercuri sînt date de relațiile:

$$E(l) = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{n} D_i p(D_i)$$

$$D^2(l) = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{n} D_i^2 p(D_i) - \frac{\pi^2}{16} \left(\sum_{i=1}^{n} D_i p(D_i)\right)^2$$

Demonstrație

Valoarea medie a diametrelor aparente ale amestecului de cercuri va fi

$$E(l) = \int_{D_i} lp(l)\mathrm{d}l;\quad l > 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind expresia lui $p(l)$ se obține

$$E(l) = \int_0^{D_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{l^2 p(D_i)}{D_i \sqrt{D_i^2 - l^2}} \, dl$$

sau

$$E(l) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(D_i)}{D_i} \int_0^{D_i} \frac{l^2}{\sqrt{D_i^2 - l^2}} \, dl$$

Dar

$$\int_0^{D_i} \frac{l^2}{\sqrt{D_i^2 - l^2}} \, dl = \left[-\frac{l\sqrt{D_i^2 - l^2}}{2} + \frac{D_i^2}{2} \arcsin \frac{l}{D_i} \right]_0^{D_i} = \frac{\pi D_i^2}{4}$$

Rezultă

$$E(l) = \sum_{i=1}^{n} p(D_i) \cdot \frac{\pi D_i}{4} = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{n} D_i \, p(D_i)$$

Pentru dispersie se pune

$$D^2(l) = E(l^2) - [E(l)^2]$$

$$E(l^2) = \int_0^{D_i} l^2 p(l) dl = \int_0^{D_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{l^3 p(D_i)}{D_i \sqrt{D_i^2 - l^2}} \, dl$$

Intervertind semnele sumă și integrală rezultă

$$E(l^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(D_i)}{D_i} \int_0^{D_i} \frac{l^3}{\sqrt{D_i^2 - l^2}} \, dl$$

Cum

$$\int_0^{D_i} \frac{l^3}{\sqrt{D_i^2 - l^2}} \, dl = \left[-\frac{2D_i^2 + l^2}{3} \sqrt{D_i^2 - l^2} \right]_0^{D_i} = \frac{2}{3} D_i^2$$

Rezultă

$$E(l^2) = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{n} D_i^2 p(D_i)$$

și prin urmare dispersia

$$D^2(l) = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{n} D_i^2 \, p(D_i) - \frac{\pi^2}{16} \left(\sum_{i=1}^{n} D_i \, p(D_i) \right)^2$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Dacă $D_1 = D_2 = \ldots = D_n$, se obțin rezultatele de la observația a 2-a ceea ce este natural.

Observație. Considerînd repartiția continuă $\{D\,;\, p(D)\}$ cunoscută, se pot calcula momentele necentrate de ordinul 1 și 2

$$\mu_1 = \int D\, p(D)\, \mathrm{d}D$$

$$\mu_2 = \int D^2 p(D) \mathrm{d}D$$

iar rezultatele consecinței se scriu sub forma:

$$E(l) = \frac{\pi}{4} \cdot \mu_1$$

$$D^2(l) = \frac{2}{3}\mu_2 - \frac{\pi^2}{16}\mu_1^2$$

Prin urmare valoarea medie și dispersia diametrelor aparente ale unui amestec de cercuri depind de momentele necentrate de ordinul 1 și 2 ale repartiției diametrelor cercurilor.

6.2.2. CAZUL INTERSECȚIEI CERCURILOR CU REȚELE PĂTRATICE

Teorema 2.3. Fie o rețea pătratică de latură „a" și o secțiune circulară de diametru D.

Densitatea de probabilitate a vectorului aleator, ale cărui componente sînt cele două diametre aparente rezultate prin intersecția secțiunii circulare cu ambele laturi ale pătratului, este estimată de relația

$$p(l_x\, l_y) = \frac{1}{D^2} \cdot \frac{l_x}{\sqrt{D^2 - l_x^2}} \cdot \frac{l_y}{\sqrt{D^2 - l_y^2}}$$

$$\text{cu } 0 \leqslant l_x \leqslant D \quad \text{și } 0 \leqslant l_y \leqslant D$$

Demonstrație. Fie x și y cele două direcții ale rețelei pătratice iar l_x și l_y cele două diametre aparente rezultate prin intersecția cercului cu laturile pătratului.

În condiții asemănătoare teoremei 2.1. probabilitatea necondiționată ca să avem în același timp $l_{ax} \leqslant l_x \leqslant l_{bx}$ și $l_{ay} \leqslant l_y \leqslant l_{by}$ este dată de elația de principiu

$$P(E_x \cap E_y) = P(E_x \cap E_y/i)P(i)$$

unde

E_x și E_y sînt evenimentele $\{l_{ax} \leqslant l_x \leqslant l_{bx}\}$ și respectiv $\{l_{ay} \leqslant l_y \leqslant l_{by}\}$ iar $P(i)$ este probabilitatea intersecției cercului cu ambele laturi ale rețelei pătratice.

Știm că $P(i) = \left(\frac{D}{a}\right)^2$

Scanned with OKEN Scanner

Cum evenimentele E_x şi E_y sînt independente putem scrie

$$P(E_x \cap E_y) = P(E_x/i)\ P(E_y/\ i) \cdot P(i)$$

Se poate arăta uşor că

$$P(E_x/i) = \sqrt{1 - \left(\frac{l_{ax}}{D}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{l_{bx}}{D}\right)^2}$$

$$P(E_y/i) = \sqrt{1 - \left(\frac{l_{ay}}{D}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{l_{by}}{D}\right)^2}$$

Prin urmare

$$P(E_x \cap E_y) = \left(\frac{D}{a}\right)^2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{l_{ax}}{D}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{l_{bx}}{D}\right)^2}\right] \times$$

$$\times \left[\sqrt{1 - \left(\frac{l_{ay}}{D}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{l_{by}}{D}\right)^2}\right]$$

Dacă $l_{ax} = 0$; $l_{ay} = 0$; $l_{bx} = C \leqslant D$; $l_{by} = B \leqslant D$ atunci probabilitatea cumulată a vectorului aleator va fi

$$P(l_x \leqslant C;\ l_y \leqslant B) = \left(\frac{D}{a}\right)^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{C}{D}\right)^2}\right]\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{B}{D}\right)^2}\right]$$

Notînd cu $p(l_x, l_y)$ densitatea de probabilitate a vectorului aleator (l_x, l_y) avem

$$\int_0^C \int_0^B p(l_x, l_y)\mathrm{d}l_x\mathrm{d}l_y = \left(\frac{D}{a}\right)^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{C}{D}\right)^2}\right]\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{B}{D}\right)^2}\right]$$

Primitiva lui $p(l_x, l_y)$ este de forma

$$F(l_x, l_y) = K\left(\frac{D}{a}\right)^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{l_x}{D}\right)^2}\right]\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{l_y}{D}\right)^2}\right]$$

unde K este o constantă ce trebuie determinată din condiţia

$$\int_0^D \int_0^D p(l_x, l_y)\mathrm{d}l_x\mathrm{d}l_y = 1$$

Prin derivare în raport cu l_x şi l_y se obţine

$$p(l_x,\ l_y) = \frac{\mathrm{d}^2 F(l_x,\ l_y)}{\mathrm{d}l_x\mathrm{d}l_y} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_x}\left\{K\left(\frac{D}{a}\right)^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{l_x}{D}\right)^2}\right] \frac{\frac{l_y}{D} \cdot \frac{1}{D}}{\sqrt{1 - \left(\frac{l_y}{D}\right)^2}}\right\} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= K\left(\frac{D}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{D^2} \cdot \frac{l_y}{\sqrt{1-\left(\frac{l_y}{D}\right)^2}} \cdot \frac{1}{D^2} \cdot \frac{l_x}{\sqrt{1-\left(\frac{l_y}{D}\right)^2}} =$$

$$= \frac{K}{a^2} \cdot \frac{l_x}{\sqrt{D^2 - l_x^2}} \cdot \frac{l_y}{\sqrt{D^2 - l_y^2}}$$

Din condiția impusă densității de probabilitate, rezultă $K = \frac{a^2}{D^2}$ și prin urmare

$$P(l_x, l_y) = \frac{1}{D^2} \frac{l_x}{\sqrt{D^2 - l_x^2}} \cdot \frac{l_y}{\sqrt{D^2 - l_y^2}}$$

Observație. În cazul particular $a = D = 1$ avem

$$P(l_x, l_y) = -\frac{l_x}{\sqrt{1 - l_x^2}} \cdot \frac{l_y}{\sqrt{1 - l_y^2}}$$

Consecință. Media și dispersia diametrelor aparente l_x sau l_y sînt date de relațiile stabilite în teorema 2.2.

Demonstrație. Ținînd seama de relațiile $E(l)$; $D^2(l)$ și $p(l_x, l_y)$ se deduc ușor valorile medii și dispersia diametrelor aparente.

Un nou rezultat se poate obține asupra mediei produsului diametrelor aparente l_x și l_y.

Teorema 2.4. Dacă l_x și l_y sînt două diametre aparente rezultate prin intersecția aleatoare a unei rețele de echidistanță „a" cu un cerc de diametru „D" atunci se verifică inegalitatea

$$E(l_x \cdot l_y) \leqslant \frac{2}{3} D^2$$

$$D^2(l_x \cdot l_y) \leqslant \frac{8D^4}{15}$$

Demonstrație. Vom folosi un rezultat obținut de Săcuiu Ion* sub forma unui corolar și anume:

Dacă $(X_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ sînt variabile aleatoare pentru care $E(|x_j|^n) < \infty$ avem

$$E\left(\left|\prod_{j=1}^{n} X_j\right|\right) \leqslant \prod_{j=1}^{n} E^{\frac{1}{n}}(|X_j|^n)$$

Rezultatul a fost obținut prin aplicarea inegalității lui Hölder.

Punînd $n = 2$; $x_1 = l_x$; $x_2 = l_y$

avem

$$E(l_x \cdot l_y) \leqslant \sqrt{E(l_x^2)}\sqrt{E(l_y^2)}$$

---

* Dispersia produsului unui număr oarecare de variabile aleatoare independente. St. Cerc. Mat. 21, 6, p. 953–963 (1969).

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$E(l_x^2) = E(l_y^2) = \frac{2}{3} D^2$$

rezultă inegalitatea pentru media produselor $l_x \cdot l_y$

$$E(l_x \cdot l_y) \leqslant \frac{2}{3} D^2$$

Pentru dispersia produselor se ţine seama că

$$D^2(l_x \cdot l_y) = E(l_x^2 \cdot l_y^2) - [E(l_x \cdot l_y)]^2$$

şi apoi de inegalităţile

$$D^2(l_x \cdot l_y) \leqslant E\,(l_x^2 \cdot l_y^2)$$

şi

$$E(l_x^2 \cdot l_y^2) \leqslant \sqrt{E(l_x^4)}\,\sqrt{E(l_y^4)}$$

Se calculează

$$E(l^4) = \int_0^D l^4 p(l)\mathrm{d}l = \frac{1}{D}\int_0^D \frac{l^5}{\sqrt{D^2 - l^2}}\,\mathrm{d}l =$$

$$= \frac{\left[-l^4\sqrt{D^2 - l^2} + 4\left(\frac{\sqrt{(D^2 - l^2)^5}}{5} - \frac{D^2\sqrt{(D^2 - l^2)^3}}{3}\right)\right]_0^D}{D}$$

$$E(l^4) = \frac{8D^4}{15}$$

rezultă

$$E(l_x^2 \cdot l_y^2) \leqslant \frac{8D^4}{15}$$

şi prin urmare

$$D^2(l_x \cdot l_y) \leqslant \frac{8D^4}{15}$$

Consecinţă.

Dacă $X = l_x \cdot l_y$ este aria dreptunghiului ale cărui laturi sînt diametrele aparente rezultate prin intersecţia unui cerc de arie S cu ambele laturi ale unei reţele pătratice de echidistanţă „a" atunci media şi dispersia ariei aleatoare X verifică inegalităţile

$$E(X) \leqslant \frac{8}{3\pi} \cdot S$$

$$D^2(X) \leqslant \frac{128}{15\pi^2} \cdot S$$

Demonstrație

Punînd $D = 2R$ în inegalitățile obținute în teorema 2.4 rezultă

$$E(X) \leqslant \frac{8}{3} R^2$$

$$D^2(X) \leqslant \frac{128}{15} R^4$$

și apoi inegalitățile de demonstrat.

6.2.3. REPARTIȚIA NUMĂRULUI DE SECȚIUNI ALE PARTICULELOR PE UNITATEA DE SUPRAFAȚĂ SAU A NUMĂRULUI DE PARTICULE PE UNITATEA DE VOLUM

Dacă pe o secțiune subțire pregătită dintr-un volum de rocă se aplică o rețea pătratică de latură unitate și dacă se notează cu $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ numărul de imagini în secțiune ale particulelor cu anumite caracteristici fizico-chimice atunci legea de repartiție care guvernează distribuția imaginilor particulelor este o lege Poisson cu densitatea de probabilitate

$$p(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

unde λ este medie aritmetică. Dacă p este probabilitatea realizării evenimentului la o singură experimentare atunci $\lambda = np$. Dispersia repartiției va fi $S^2 = \lambda$.

Evenimentul apariției imaginii unei particule într-un pătrat unitate al rețelei este un eveniment rar, iar legea de repartiție a evenimentelor rare este legea Poisson. În mod analog se poate afirma că legea de repartiție a numărului de particule cu anumite caracteristici în unitatea de volum este tot o lege Poisson.

6.2.4. REPARTIȚIA ARIILOR SECȚIUNILOR PARTICULELOR SAU A VOLUMELOR PARTICULELOR

În cazul fenomenelor naturale pe care le avem în vedere, particulele cu anumite proprietăți fizico-chimice au arii în secțiune, sau volume, care urmează fie repartiții normale, fie repartiții lognormale.

Deoarece în natură nu se întîlnesc de regulă fenomene guvernate de hazardul pur, ci condiții fizico-chimice bine determinate care conduc la legături fenomenologice pe anumite distanțe, legea de repartiție frecvent întîlnită este cea lognormală.

Densitatea de probabilitate a repartițiilor lognormale este

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_{\ln}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\ln x - \ln \gamma)^2}{2\sigma^2_{\ln}}}$$

unde $\ln \gamma$ și $\sigma^2_{\ln}$ sînt media și dispersia variabilei aleatoare $\ln x$.

Scanned with OKEN Scanner

Parametri legii lognormale sînt:

— media $m = \gamma \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_{\ln}^2\right)$

— dispersia $\sigma_x^2 = m^2\left(\exp.\frac{1}{2}\sigma_{\ln}^2 - 1\right)$

Utilizînd logaritmii zecimali avem

$$\log m = \log \gamma + \frac{1}{2} a\sigma_{\log}^2$$

$$\log \sigma_x = \log m + \frac{1}{2}\log (\exp. a^2 \sigma_{\log}^2 - 1)$$

unde

$$a = 2{,}3025.$$

§6.3. INTERVALE DE ÎNCREDERE PENTRU DIAMETRUL REAL AL PARTICULELOR

Se vor demonstra în acest paragraf teoreme privind determinarea unor intervale de încredere pentru diametrul real al particulelor. Cele două cazuri: medii omogene (particule de aceeaşi dimensiune) şi neomogene (amestec de particule cu diferite dimensiuni), vor fi rezolvate asemănător, pentru cazul doi considerîndu-se diametrul real al amestecului.

Pentru selecţii mici asupra variabilei aleatoare rezultată ca intersecţie a cercului de diametru D cu o reţea de linii paralele, se vor demonstra mai întîi teoreme asupra funcţiilor caracteristice şi funcţiilor de repartiţie, atît pentru media de selecţie cît şi pentru suma selecţiei.

6.3.1. SELECŢII DE VOLUM MARE

Teorema 3.1. Dacă $l_1, l_2, \ldots, l_n$ este o selecţie de volum mare asupra variabilei aleatoare l rezultată prin intersecţia unui cerc de diametru D cu o reţea de linii paralele, echidistante, atunci avem următoarele limite pentru intervalul de încredere al diametrului D:

$$\frac{4\sqrt{n}\,\bar{l}}{\pi\sqrt{n} + 4Ky} \leqslant D \leqslant \frac{4\sqrt{n}\,\bar{l}}{\pi\sqrt{n} - 4Ky}, \text{ pentru } n \text{ mare}$$

unde $K = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}}$ iar $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1 - \varepsilon$

şi $\bar{l}$ valoarea medie de selecţie.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Conform teoremei lui Lindeberg avem

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} l_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right| < y\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{l} - \mu)}{\sigma}\right| < y\right) = \Phi(y)$$

unde μ și σ^2 sînt media și dispersia variabilei aleatoare l iar $\Phi(y)$ funcția lui Laplace.

Cum

$$\mu = \frac{\pi}{4} D; \qquad \sigma^2 = D^2\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}\right)$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sqrt{n}\left(\bar{l} - \frac{\pi}{4} D\right)}{D\sqrt{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}}}\right| < y\right) = \Phi(y)$$

sau

$$P\left(-y < \frac{\sqrt{n}\left(\bar{l} - \frac{\pi}{4} D\right)}{D\sqrt{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}}} < y\right) = \Phi(y) = 1 - \varepsilon$$

pentru n mare.

După calcule rezultă

$$P\left(\frac{4\sqrt{n}\,\bar{l}}{\pi\sqrt{n} + 4Ky} < D < \frac{4\sqrt{n}\,\bar{l}}{\pi\sqrt{n} - 4Ky}\right) = 1 - \varepsilon$$

cu

$$K = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}}$$

și prin urmare rezultă următoarele limite ale intervalului de încredere pentru diametrul real D

$$\frac{4\sqrt{n}\,\bar{l}}{\pi\sqrt{n} + 4Ky} < D < \frac{4\sqrt{n}\,\bar{l}}{\pi\sqrt{n} - 4Ky}$$

cu

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-y}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1 - \varepsilon.$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.2. Dacă coardele într-un cerc rezultă ca intersecție a cercului de diametru D cu o rețea de linii paralele și sînt variabile aleatoare cu densitatea de probabilitate

$$p(l) = \frac{1}{D} \frac{l}{\sqrt{D^2 - l^2}}$$

atunci distribuția mediei de selecție are ca funcție caracteristică expresia

$$\varphi(t) = \sum_{\alpha_s}^{s=0,\ldots,N+1} \left[\frac{m!}{\prod_{s=0}^{N+1} \alpha_s!} \prod_{s=0}^{N} A_s^{\alpha_s+1} \right] t^{\sum_{s=0}^{N} (s+1)\alpha_s + 1}$$

Demonstrație

Funcția caracteristică a mediei de selecție a coardelor va fi

$$\varphi(t) = M(e^{it\bar{l}}) = \prod_{k=1}^{m} M\left(e^{i\frac{t}{m}l_k}\right)$$

sau punînd

$$\frac{t}{m} = u$$

$$\varphi(u) = \prod_{k=1}^{m} M(e^{iul_k})$$

unde $M(e^{iul})$ este funcția caracteristică a variabilei aleatoare l.

$$\varphi_0(u) = M(e^{iul}) = \int_0^D e^{iul} p(l)\,dl = \frac{1}{D} \int_0^D \frac{l e^{iul}}{\sqrt{D^2 - l^2}}\,dl$$

Sau după o integrare prin părți

$$\varphi_0(u) = 1 + \frac{iu}{D} \int_0^D e^{iul} \sqrt{D^2 - l^2}\,dl$$

Considerînd dezvoltarea în serie a lui e^{iul} avem

$$\varphi_0(u) = 1 + \frac{iu}{D} \int_0^D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n u^n}{n!} l^n \sqrt{D^2 - l^2}\,dl =$$

$$= 1 + \frac{iu}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n u^n}{n!} \int_0^D l^n \sqrt{D^2 - l^2} \cdot dl$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$I_n = \int_0^D l^n \sqrt{D^2 - l^2} \cdot \mathrm{d}l = -\frac{l^{n-1}\sqrt{(D^2 - l^2)^3}}{n+2}\Big|_0^D + \frac{(n-1)D^2}{n+2}\int_0^D l^{n-2}\sqrt{D^2 - l^2}\,\mathrm{d}l.$$

sau

$$I_n = \frac{(n-1)D^2}{n-1} I_{n-2}$$

Utilizînd această relaţie de recurenţă şi observînd că pentru n impar numărul de integrale succesive este $\frac{n-1}{2}$, iar pentru n-par este $\frac{n-2}{2}$, se poate scrie

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\,(\ldots)\,4\times 2}{(n-2)(n-4)(n-6)\,(\ldots)\,3\times 1}\,(D^2)^{\frac{n-1}{2}}\,I_1 \text{ pentru } n \text{ impar} \\ \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\,(\ldots)\,5\times 3}{(n-2)(n-4)(n-6)\,(\ldots)\,4\times 2}\,(D^2)^{\frac{n-2}{2}}\,I_2 \text{ pentru } n \text{ par} \end{cases}$$

Cum

$$I_1 = \int_0^D l\sqrt{D^2 - l^2}\,\mathrm{d}l = -\frac{\sqrt{(D^2 - l^2)^3}}{3}\Big|_0^D = \frac{D^3}{3}$$

$$I_2 = \int_0^D l^2\sqrt{D^2 - l^2}\,\mathrm{d}l = \frac{2l^3 - D^2 l}{8}\sqrt{D^2 - l^2}\Big|_0^D + \frac{D^4}{8}\arcsin\frac{l}{D}\Big|_0^D = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{D^4}{8}$$

Se poate scrie I_n sub formă restrînsă

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{D^{n+2}}{3}\displaystyle\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-2r+1}{n-2r}\right) \text{ pentru } n \text{ impar} \\ \dfrac{\pi D^{n+2}}{16}\displaystyle\prod_{r=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{n-2r+1}{n-2r}\right) \text{ pentru } n \text{ par} \end{cases}$$

Funcţia caracteristică a variabilei aleatoare l se scrie acum, pentru variabila t:

$$\varphi_0(t) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)$$

unde

$$U_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{(itD)^{n+1}}{n!\,n^{n+1}}\displaystyle\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-2r+1}{n-2r}\right) \text{ pentru } n \text{ impar} \\ \dfrac{\pi}{16}\,\dfrac{(itD)^{n+1}}{n!\,n^{n+1}}\displaystyle\prod_{r=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{n-2r+1}{n-2r}\right) \text{ pentru } n \text{ par} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta utilizînd criteriul lui d'Alembert că seria cu termenul general U_n este convergentă.

Într-adevăr, dacă n este impar

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\dfrac{(itD)^{n+2}}{(n+1)!(n+1)^{n+2}} \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\dfrac{n-2r+1}{n-2r}\right)}{\dfrac{(itD)^{n+1}}{n!\,n^{n+1}} \prod_{r=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\dfrac{n-2r+1}{n-2r}\right)}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{itD \cdot n^{n+1}}{(n+1)(n+1)^{n+2}} = \frac{itD}{n^2\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+3}} = \frac{itD}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3}$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = 1$$

rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{itD}{n^2} = 0$$

Prin urmare seria cu termenul general U_n definită anterior este convergentă. Se poate pune

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < K < 1$ şi prin urmare restul seriei pentru $n \geqslant N$ va fi

$$R_N = U_{N+1} + U_{N+2} + \ldots < U_N(K + K^2 + \ldots)$$

adică

$$R_N < \frac{KU_N}{1-K}$$

Funcţia caracteristică a mediei de selecţie va fi

$$\varphi(t) = [\varphi_0(t)]^m = \left[1 + \sum_{n=0}^{N} U_n(t)\right]^m$$

Punînd

$$U_n(t) = A_n \cdot t^{n+1}$$

cu

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{(iD)^{n+1}}{n!\,n^{n+1}} \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\dfrac{n-2r+1}{n-2r}\right) & \text{pentru } n\text{-impar} \\ \dfrac{\pi}{16}\cdot\dfrac{(iD)^{n+1}}{n!\,n^{n+1}} \prod_{r=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\dfrac{n-2r+1}{n-2r}\right) & \text{pentru } n\text{-par} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi scriind dezvoltat polinomul $\left[1+\sum_{n=0}^{N} A_n t^{n+1}\right]^m$ obţinem

$$\varphi(t) = [1 + A_0 t + A_1 t^2 + \ldots + A_N t^{N+1}]^m =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_s \\ s=0,\ldots N+1}} \frac{m!}{\alpha_0!\alpha_1! \ldots \alpha_{N+1}!} (A_0 t)^{\alpha_1} (A_1 t^2)^{\alpha_2} \ldots (A_N t^{N+1})^{\alpha_{N+1}}$$

unde

$$\sum_{s=0}^{N+1} \alpha_s = m$$

Se poate scrie prescurtat

$$\varphi(t) = \sum_{\alpha_s}^{s=0,1,\ldots,N+1} \frac{m!}{\prod_{s=0}^{N+1} \alpha_s!} \cdot \prod_{s=0}^{N} A_s^{\alpha_s+1} \cdot t^{\alpha_s+1\ s+1)}$$

sau

$$\varphi(t) = \sum_{\alpha_s}^{s=0,1,\ldots,N+1} \left[\frac{m!}{\prod_{s=0}^{N+1} \alpha_s!} \cdot \prod_{s=0}^{N} A_s^{\alpha_s+1}\right] t^{\sum_{s=0}^{N} (s+1)\alpha_s+1}$$

Se observă că distribuţia cu această funcţie caracteristică este o distribuţie asemănătoare distribuţiei variabilei aleatoare l cu funcţia caracteristică $\varphi_0(t)$.

Teorema 3.3. Dacă $l_1, l_2, \ldots, l_m$ este o selecţie asupra variabilei aleatoare l obţinută ca intersecţie a unui arc de diametru necunoscut D cu o reţea de linii paralele, atunci funcţia de repartiţie şi densitatea de probabilitate a mediei de selecţie vor fi

$$F_m(x) = \frac{i^K}{2\pi} \sum_{\alpha_n} \frac{m!}{\prod_{n=0}^{N+1} \alpha_n!} \prod_{n=0}^{N} A_n^{\alpha_n+1} \cdot F^{(K-1)}(x)$$

$$f_m(x) = \frac{i^K}{2\pi} \sum_{n_n} \frac{m!}{\prod_{n=0}^{N+1} \alpha_n!} \prod_{n=0}^{N} A_n^{\alpha_n+1} \cdot F^{(K)}(x)$$

cu $$K = \sum_{n=0}^{N} (n+1)\alpha_{n+1}; \quad \sum_{n=0}^{N+1} \alpha_n = m \quad \text{şi}$$

A_n o funcţie corespunzătoare determinată de D.

Demonstraţie. Conform teoremei lui Lévy (1925) dacă X este o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie F şi funcţia caracteristică φ şi dacă F este continuă în $x \pm c$ cu $c > 0$, atunci

$$F(x+c) - F(x-c) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\sin ct}{t} e^{-itx} \cdot \varphi(t)dt$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum funcţia caracteristică a mediei de selecţie a coardelor l este conform teoremei 3.2.

$$\varphi_m(t) = \sum_{\alpha_n}^{n=0,1,\ldots,N+1} \left[\frac{m!}{\prod_{n=0}^{N+1} \alpha_n!} \cdot \prod_{n=0}^{N} A_n^{\alpha_n+1} \right] t^K$$

$$\text{cu } K = \sum_{n=0}^{N} (n+1)\,\alpha_{n+1}$$

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \dfrac{(iD)^{n+1}}{n!\, n^{n+1}} \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\dfrac{n-2r+1}{n-2r} \right) \text{ pentru } n\text{-impar} \\ \dfrac{\pi}{16} \cdot \dfrac{(iD)^{n+1}}{n!\, n^{n+1}} \prod_{r=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\dfrac{n-2r+1}{n-2r} \right) \text{ pentru } n\text{-par} \end{cases}$$

se obţine

$$F_m(x+C) - F_m(x-C) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha_n}^{n=0,1,\ldots,N+1} \frac{m!}{\prod_{n=0}^{N+1} \alpha_n!} \prod_{n=0}^{N} A_n^{\alpha_n+1} \cdot \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{\sin ct}{t} e^{-itx} \cdot t^K \, dt \text{ cu } \left(\sum_{n=0}^{N+1} \alpha_n = m \right)$$

Notăm

$$I = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{\sin ct}{t} e^{-itx} t^K dt.$$

Punînd

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{şi} \quad c = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

avem

$$I = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)t}{t} \cdot e^{-i\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)t} \cdot t^K dt = \int_{-a}^{a} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{(-it)} \cdot t^K dt$$

sau

$$I = \lim_{a\to\infty} i^K \int_{-a}^{a} (-it)^{K-1} [e^{-itx_1} - e^{-itx_2}]\, dt.$$

Se observă uşor că putem scrie

$$I = \lim_{a\to\infty} i^K \left[\frac{d^{K-1}}{dx_1^{K-1}} \int_{-a}^{a} e^{-itx_1} dt - \frac{d^{K-1}}{dx_2^{K-1}} \int_{-a}^{a} e^{-itx_2} dt \right].$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$I = i^K [\Psi^{(K-1)}(x_1) - \Psi^{(K-1)}(x_2)]$$

notînd

$$\Psi^{(K-1)}(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{d^{K-1}}{dx^{K-1}} \int_{-a}^{a} e^{-itx} \cdot dt$$

Avem în final

$$F_m(x_1) - F_m(x_2) = \frac{i^K}{2\pi} \sum_{\alpha_n}^{n=0,1,\ldots,N+1} \left[\frac{m!}{\prod_{n=0}^{N+1} \alpha_n!} \prod_{n=0}^{N} A_n^{\alpha_{n+1}} \right] \cdot [\Psi^{(K-1)}(x_1) - \Psi^{(K-1)}(x_2)]$$

$$\text{cu } \left(\sum_{n=0}^{N+1} \alpha_n = m \right)$$

Se observă că

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-itx_2} dt =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{ix_2} e^{-itx_2} \Big|_{-a}^{a} \right] = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{ix_2} (e^{-iax_2} - e^{iax_2}) \right]$$

sau

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-itx_2} dt = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{ix_2} e^{iax_2}$$

Dacă facem pe $x_2 \to \infty$ atunci

$$\frac{1}{ix_2} e^{iax_2} \to \infty$$

şi putem scrie funcţia de repartiţie a mediei de selecţie a variabilei aleatoare, l sub forma

$$F_m(x) = \frac{i^K}{2\pi} \sum_{\alpha_n} \left| \frac{m!}{\prod_{n=0}^{N+1} \alpha_n!} \prod_{n=0}^{N} A_n^{\alpha_{n+1}} \right| \cdot \Psi^{(K-1)}(x)$$

cu $\left(\sum_{n=0}^{N+1} \alpha_n = m \right)$

Densitatea de repartiţie va fi

$$f_m(x) = \frac{dF_m(x)}{dx} = \frac{i^K}{2\pi} \sum_{\alpha_n} \frac{m!}{\prod_{n=0}^{N+1} \alpha_n!} \prod_{n=0}^{N} A_n^{\alpha_{n+1}} \cdot \Psi^{(K)}(x)$$

$$\text{cu } K = \sum_{n=0}^{N} (n+1)\alpha_{n+1} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=0}^{N+1} \alpha_n = m$$

Scanned with OKEN Scanner

S-au obținut în acest fel dezvoltări asimptotice ale lui $F_m(x)$ și $f_m(x)$.

Teorema 3.4. Dacă $l_1, l_2 \ldots l_n$ este o selecție asupra variabilei aleatoare l definită anterior, atunci funcția de repartiție F_n și densitatea de repartiție f_n ale variabilei aleatoare

$\left(\sum_{i=1}^{n} l_i - n \cdot \frac{\pi}{4} D\right) / \sqrt{n} KD$ cu $K = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}}$, admit dezvoltări de forma:

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{j=1}^{r-2} \frac{1}{n^{j/2}} Q_j^*(x) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n^{r-2}}}\right)$$

$$f_n(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^{r-2} \frac{1}{n^{j/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q_j^*(x) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n^{r-2}}}\right)$$

unde $\Phi(x)$ și $\varphi(x)$ sînt funcția de repartiție și respectiv densitatea de probabilitate a repartiției normale iar $Q_j^*(x)$ funcții de x cu structuri corespunzătoare.

Demonstrație. Demonstrația rezultă imediat ca o consecință a teoremei lui Edgeworth (1905) asupra variabilei aleatoare X ce admite momentele $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ $(r > 2)$ finite.

În cazul nostru variabila aleatoare este coarda l rezultată ca intersecție a cercului de diametru D cu o rețea de linii paralele și are densitatea de probabilitate, conform teoremei 2.1

$$f(l) = \frac{1}{D} \frac{l}{\sqrt{D^2 - l^2}} \; ; \; l > 0$$

Media și dispersia variabilei aleatoare l sînt respectiv

$$\mu = \frac{\pi}{4} D \text{ și } \sigma^2 = D^2\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}\right)$$

(v. consecința 2.2) iar momentele $\mu_1, \ldots, \mu_r$ $(r > 2)$ există și sînt finite.

În aceste condiții ne propunem să determinăm funcția de repartiție și densitatea de repartiție a variabilei aleatoare

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} l_i - n \cdot \frac{\pi}{4} D}{KD}$$

cu $K = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}}$

Vom scrie mai întîi forma dezvoltată a funcției caracteristice a variabilei aleatoare $\left(l - \frac{\pi}{4} D\right) / \sqrt{n} KD$ în felul următor

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \sum_{j=3}^{r} \frac{(it)^j \alpha_j}{j! \sqrt{n^j}} + 0\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^r\right)$$

cu $\alpha_j = \mu_j / \sigma^j$ și $\lim_{n \to \infty} 0\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^r\right) = 0$

pentru orice $t \neq 0$

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$\mu_j = E(l^j) = \int_0^D l^j\, p(l)\mathrm{d}l = \frac{1}{D}\int_0^D \frac{l^{j+1}}{\sqrt{D^2 - l^2}}\,\mathrm{d}l =$$

$$= \frac{j}{D}\int_0^D l^{j-1}\sqrt{D^2 - l^2}\;\mathrm{d}l = \frac{j}{D}\, I_{j-1}$$

unde

$$I_{j-1} = \frac{(j-2)D^2}{j+1}\, I_{j-3}$$

Constantele α_j au expresiile generale

$$\alpha_j = \frac{jKI_{j-1}}{(KD)^{j+1}}$$

cu K definit anterior.

Funcţia caracteristică a variabilei

$$L = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i - n\cdot\frac{\pi}{4}D}{\sqrt{n}\,KD}$$

va fi

$$\varphi_n(t) = [\varphi(t)]^n$$

Se poate scrie acum dezvoltarea

$$\ln \varphi_n(t) = -\frac{t^2}{2} + n\sum_{j=3}^{r} + \frac{(it)^j R_j}{j!\sqrt{n^j}} + n0\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^r\right)$$

unde R_j au expresii corespunzătoare funcţie de α_j şi sînt considerate ca semivarianţii repartiţiei variabilei

$$\left(l - \frac{\pi}{4}D\right)/KD$$

Se obţine

$$\varphi_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\cdot E(t, n)$$

unde

$$E(t, n) = \exp\left[n\sum_{j=3}^{r}\frac{(it)^j}{j!\,n^{j/2}} + 0\left(\left(\frac{t}{n}\right)^r\right)\right]$$

sau după o dezvoltare a exponenţialei

$$E(t, n) = 1 + \sum_{j=1}^{r-2}\frac{1}{n^{j/2}}Q_j(it) + n\cdot 0\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^r\right)$$

cu $Q(it)$ un polinom de gradul $3j$ în (it).

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de teorema lui Lévy, funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare L va fi dată de

$$F_n(x_1) - F_n(x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)t}{t} \cdot e^{-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)it} \cdot \varphi_n(t)\,dt$$

după ce s-a notat $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ şi $c = \frac{x_1 - x_2}{2}$

Prin scrierea funcţiei trigonometrice sub formă complexă se poate scrie

$$\frac{\sin\frac{(x_1 - x_2)}{2}t}{t} \cdot e^{-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)it} = \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{2(-it)}$$

şi prin urmare

$$F_n(x_1) - F_n(x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx_1 - \frac{t^2}{2}} - e^{-itx_2 - \frac{t^2}{2}}}{2(-it)}\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r-2} \frac{1}{n^{j/2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-tix_1} - e^{-itx_2}}{(-it)} Q_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n^{r-2}}}\right)$$

Prima integrală din membrul drept este tocmai $\Phi(x_1) - \Phi(x_2)$

unde

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(t)\,dt$$

cu $\varphi(t)$ densitatea de probabilitate a repartiţiei normale.

Cum $Q_j(it)$ este un polinon în (it) rezultă că cea de a doua integrală din membrul drept se poate scrie sub forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{(-it)} Q_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*\left[(-it)^j\left(e^{-itx_1 - \frac{t^2}{2}} - e^{-itx_2 - \frac{t^2}{2}}\right)\right]dt$$

unde s-a notat prin Q_j^* funcţii de forma Q_j prin înlocuirea argumentului it cu argumentul din paranteza mare.

Ţinînd seama că

$$\Phi^{(j+1)}(x) = \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}\Phi(x) = \frac{d^j}{dx^j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx - \frac{t^2}{2}}\,dt\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-it)^j e^{-itx - \frac{t^2}{2}}\,dt$$

Scanned with OKEN Scanner

integrala a doua se scrie sub forma

$$Q_j^*[\Phi^{(j+1)}(x_1) - \Phi^{(j+1)}(x_2)] = Q_j^*(x_1) - Q_j^*(x_2)$$

Înlocuind în expresia funcției de repartiție avem

$$F_n(x_1) - F_n(x_2) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2) + \sum_{j=1}^{r-2} \frac{Q_j^*(x_1) - Q_j^*(x_2)}{n^{j/2}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n^{r-2}}}\right)$$

Dacă $x_2 \to -\infty$, avem

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{j=1}^{r-2} \frac{Q_j^*(x)}{n^{j/2}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n^{r-2}}}\right)$$

Prin derivare se obține densitatea de probabilitate

$$f_n(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^{r-2} \frac{1}{n^{j/2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q_j^*(x) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n^{r-2}}}\right)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 3.5. În condițiile teoremelor 3.3 sau 3.4 intervalul de încredere al diametrului real al unei particule are limitele

$$\frac{4\sum_{i=1}^{n} l_i}{\sqrt{n}\,(\pi\sqrt{n} + 4yK)} < D < \frac{4\sum_{i=1}^{n} l_i}{\sqrt{n}\,(\pi\sqrt{n} - 4yK)}$$

$$\text{cu } K = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}}$$

Demonstrație

Să considerăm variabila aleatoare

$$\left(\sum_{i=1}^{n} l_i - n\frac{\pi}{4}D\right) \Big/ \sqrt{n}\,KD$$

cu $K = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}}$, cu densitatea de repartiție f_n dată de teorema 2.8 sau 2.9.

Se determină y astfel încît

$$P\left(-y < \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i - n\frac{\pi}{4}D}{\sqrt{n}\,KD} < y\right) = \int_{-y}^{y} f_n(x)\mathrm{d}x = 1 - \alpha$$

pentru un α dat.

Rezolvînd inegalitățile în raport cu D se obține

$$P\left(\frac{4\sum_{i=1}^{n} l_i}{\sqrt{n}\,(\pi\sqrt{n} + 4yK)} < D < \frac{4\sum_{i=1}^{n} l_i}{\sqrt{n}\,(\pi\sqrt{n} - 4yK)}\right) = 1 - \alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 7

APLICAȚII PRACTICE ALE TEORIEI PROBABILITĂȚILOR GEOMETRICE ÎN STUDIUL UNOR PROBLEME GEOLOGICE

Se prezintă în acest capitol unele probleme paractice rezolvate cu ajutorul metodelor teoriei probabilităţilor geometrice.

Pentru a uşura aplicarea practică a metodelor de către specialiştii din domeniul cercetărilor geologice, vom face apel chiar la exemple numerice concrete.

§7.1. REŢELE OPTIME DE CERCETARE GEOFIZICĂ

Cercetările geofizice se efectuează pe profile paralele, la echidistanţe ce se apreciază în funcţie de dimensiunile previzibile ale corpurilor care fac obiectul cercetărilor.

În scopul creşterii eficienţei cercetărilor, este necesar să se determine cele mai raţionale reţele de cercetare geofizică cu şansă mare de evidenţiere a unor zone anomale.

Cazurile care pot crea efecte anomale în cercetările geofizice, se pot reprezenta într-o secţiune orizontală (planul suprafeţei de prospectat) fie ca segmente (cazul filoanelor, faliilor sau zonelor mineralizate de grosimi mici) fie ca suprafeţe cu contur aproximativ circular, sau sub formă de elipsă (cazul corpurilor lenticulare, a lentilelor de bauxită, intruziunilor andezitice etc.).

În afara reţelelor obişnuite de profile paralele se pot practica şi reţele pătratice sau dreptunghiulare.

În funcţie de tipul reţelei de cercetare şi forma corpurilor ce urmează a fi cercetate, se pot calcula probabilităţile de interceptare cu ajutorul relaţiilor obţinute în cap. 3. Astfel, — pentru zone reprezentate sub formă de segmente de lungime l:

$$P(i) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{a} & \text{— în cazul reţelelor de profile paralele la echidistanţa } a. \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{l}{a}\left(4 - \frac{l}{a}\right) & \text{— în cazul reţelelor pătratice } a \times a. \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{l(a+b)}{ab}\left(2 - \frac{l}{a+b}\right) & \text{— în cazul reţelelor dreptunghiulare } a \times b. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

— pentru zone reprezentate sub formă de suprafețe aproximativ circulare de diametru D:

$$P(i) = \begin{cases} \frac{D}{a} & \text{— în cazul rețelelor de profile paralele la echidistanța } a. \\ \frac{D}{a}\left(2 - \frac{D}{a}\right) & \text{— în cazul rețelelor pătratice } a \times a. \\ \frac{D}{ab}(a + b - D) & \text{— în cazul rețelelor dreptunghiulare } a \times b. \end{cases}$$

Aceste relații pot fi utilizate atunci cînd din considerente geologice se pot aprecia dimensiunile corpurilor care fac obiectul prospectării.

În situațiile în care acest lucru nu se poate face, dar totuși se pot aprecia valorile medii ale lungimilor sau diametrelor unor zone, probabilitățile de interceptare cu diferitele rețele, sînt date de relațiile:

$$P(i) = \frac{2}{\pi a} \cdot \bar{X}(l)$$

pentru segmente, și:

$$P(i) = \frac{1}{a} \cdot \bar{X}(D)$$

pentru suprafețe circulare.

Am notat valorile medii așteptate $\bar{X}(l)$ și $\bar{X}(D)$ ale lungimii segmentelor și respectiv diametrelor cercurilor.

Cunoașterea probabilităților de apariție a unor zone anomale (cauzate de existența unor corpuri perturbatoare) într-o prospecțiune geofizică efectuată pe o rețea de profile, este o informație foarte utilă pentru decizia alegerii echidistanței rețelei.

În cazurile în care rețelele de cercetare geofizică se orientează perpendicular pe direcția corpurilor perturbatoare, probabilitățile

$$P(i) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{a} \quad \text{sau} \quad P(i) = \frac{2}{\pi a} \bar{X}(l)$$

se vor multiplica cu $\frac{\pi}{2}$.

Pentru aplicații practice curente este util să se construiască niște abace pe care să se citească cu ușurință probabilitățile $P(i)$ în funcție de valori presupuse pentru a și l sau a și D.

În lucrarea [100] se prezintă o abacă de acest fel.

Vom prezenta în continuare o metodă de apreciere a echidistanței raționale între profilele de cercetare paralele, utilizînd și un criteriu de natură economică.

Să presupunem mai întîi că în perimetrul de cercetat se așteaptă să se găsească zone de lungimi și frecvențe ca cele din tabelul 1.1.

Tabel 1.1.

Statistica zonelor presupuse

Dimensiuni posibile d_i	5	10	20	30	50	100	Total
frecvența f_i față de 100%	10	20	30	25	10	5	100%

Scanned with OKEN Scanner

Aceste date se apreciază din experienţa geologică căpătată într-o zonă vecină sau similară din punct de vedere geologic.

Vom calcula probabilităţile de interceptare cu reţele de echidistanţe $a =$ $= 25$ m; 50 m; 75 m; 100 m; 200 m. Să presupunem că nu este necesar să alegem reţele cu direcţii preferenţiale. În caz contrar, probabilităţile citite pe abacă ar trebui să fie multiplicate cu $\frac{\pi}{2}$.

În tabelul 1.2 se dau probabilităţile citite pe abacă: $P(i)$.

Tabelul 1.2.

Probabilităţile de interceptare P(i)

d_i \ a	25	50	75	100	200
5	0,120	0,060	0,040	0,030	0,018
10	0,247	0,120	0,080	0,060	0,030
20	0,500	0,260	0,170	0,120	0,060
30	1,000	0,360	0,260	0,180	0,090
50	1,00	1,000	0,420	0,320	0,150
100	1,000	1,000	1,000	1,000	0,320

Probabilităţile de neinterceptare $q_i = 1 - P(i)$ se calculează în tabelul 1.3.

Tabelul 1.3.

Probabilităţile de neinterceptare q_i

d_i \ a	25	50	75	100	200
5	0,880	0,940	0,960	0,970	0,982
10	0,753	0,880	0,920	0,940	0,970
20	0,500	0,740	0,830	0,880	0,940
30	0	0,640	0,740	0,820	0,910
50	0	0	0,580	0,680	0,850
100	0	0	0	0	0,680

Se poate calcula acum pentru fiecare reţea numărul de zone din fiecare dimensiune ce nu s-ar intercepta (tabelul 1.4).

Se calculează cu relaţia:

$$n_i = f_i \cdot q_i$$

Tabelul 1.4

Numărul zonelor neinterceptate

d_i	f_i	$n_i(a)$				
		25	50	75	100	200
5	10	9	9	10	10	10
10	20	15	17	18	19	19
20	30	15	22	25	27	28
30	25	0	16	18	20	23
50	10	0	0	6	7	8
100	5	0	0	0	0	3
Total	100	39	64	77	83	91

Scanned with OKEN Scanner

Se observă o creştere foarte rapidă a numărului de zone ce nu ar fi interceptate cu creşterea echidistanţei reţelei de cercetare.

Vom aplica în continuare o metodă de alegere a echidistanţei de cercetare în funcţie de un procent acceptabil de pierdere a unei cantităţi din rezerva de minereu aferentă zonelor considerate. În acest fel se obţine un criteriu de apreciere cantitativă a reţelelor raţionale.

Să presupunem un indice de mineralizare de b tone minereu pe unitatea de lungime a zonelor.

Rezultă o cantitate totală:

$$Q_T = b \sum f_i d_i = 2600\, b \text{ (tone)}$$

Pentru fiecare echidistanţă „a" se poate calcula cantitatea totală ce s-ar pierde cu relaţia:

$$Q(a) = b \sum d_i n_i(a)$$

În tabelul 1.5, se calculează valorile $Q(a)$.

Valorile lui Q(a) — **Tabelul 1.5**

a	25	50	75	100	200
$Q(a)$	495 b	1135 b	1570 b	1730 b	2190 b

Procentul de pierdere din rezerva totală va fi:

$$e(a) = \frac{Q(a)}{Q_T} 100$$

şi este notat în tabelul 1.6.

Procentul de pierdere e(a) — **Tabelul 1.6**

a	25	50	75	100	200
$e(a)$	19	43	60	66	84

În figura 7.1.1. se construieşte grafic variaţia procentului de pierdere $e(a)$ cu echidistanţa a.

Dacă se acceptă un procent maxim de pierdere de 10%, atunci echidistanţa reţelei de cercetare este necesar să fie de cca 15 m. Dacă s-ar putea accepta o pierdere de 30%, atunci echidistanţa reţelei se poate alege de cca 30—35 m.

Procentul maxim de pierdere ce se acceptă se poate stabili pe baza unui anumit criteriu economic.

Spre exemplu pentru fiecare $e(a)$ se calculează costul total al cercetărilor pe reţeaua de echidistanţă a. Fie $C(a)$ acest cost total de cercetare, într-un perimetru de arie dată.

Scanned with OKEN Scanner

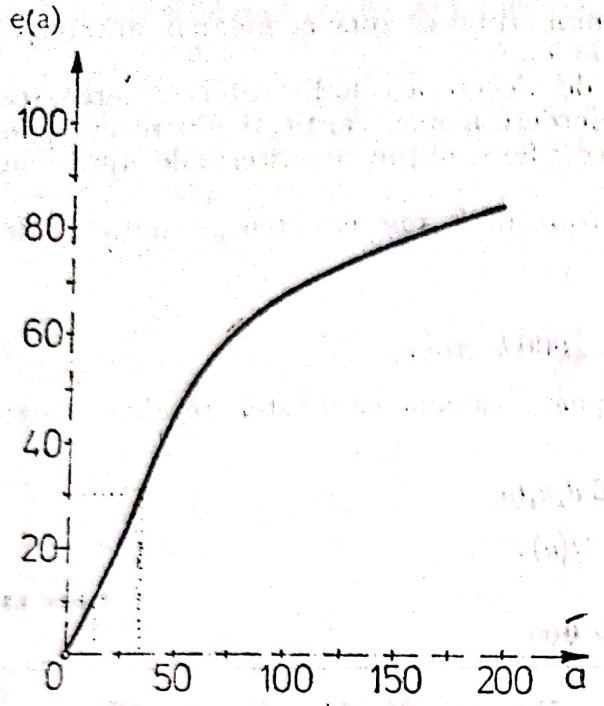

Fig. 7.1.1

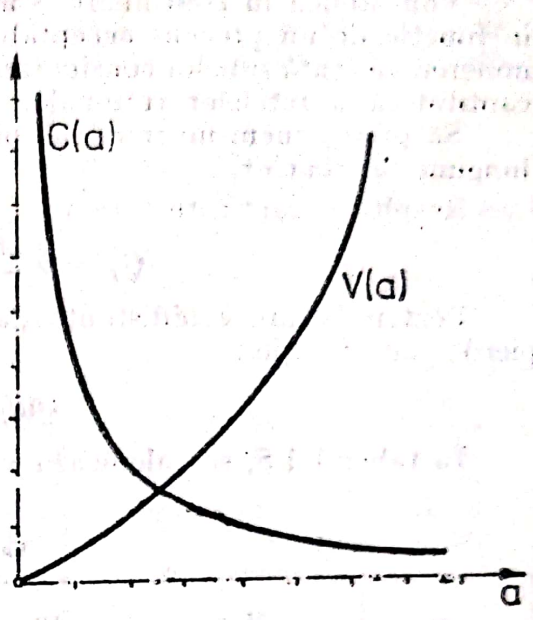

Fig. 7.1.2

Este de aşteptat ca funcţia $C(a)$ să fie de forma $C(a) = \frac{K}{a}$.

Criteriul pentru determinarea echidistanţei reţelei de cercetare ar putea fi acela al minimizării sumei cheltuielilor de cercetare cu valoarea rezervei ce se pierde din cauza neinterceptării zonelor.

Să presupunem că printr-una din metodele de prognoză cunoscute, s-a putut previziona în perimetrul de cercetat un volum de rezerve R (tone).

Cantitatea de rezervă neinterceptată ar fi $e(a)R$ iar valoarea economică a acestei cantităţi este $V(a) = \frac{ve(a)\ R}{100}$ unde prin v am notat valoarea unei tone. În figura 7.1.2 se prezintă graficele de principiu ale funcţiilor $C(a)$ şi $V(a)$.

Se impune condiţia :

$$\text{Min}\left[\frac{ve(a)R}{100} + C(a)\right]$$

Corespunzător graficului lui $e(a)$ se pune :

$$e(a) = \alpha a^{\beta}$$

şi deci se cere

$$\text{Min}\left[\frac{\alpha v R}{100}\, a^{\beta} + \frac{K}{a}\right]$$

Valoarea lui „a" care minimizează funcţia din paranteză, va fi obţinută prin anularea derivatei de ordinul întîi :

$$\frac{\alpha v R \beta}{100}\, a^{\beta-1} - \frac{K}{a^2} = 0$$

de unde:

$$a^{\beta+1} = \frac{100K}{\alpha v R \beta}$$

Cum β nu este neapărat un număr întreg, valoarea lui a se află ușor prin logaritmare:

$$\log a = \frac{1}{\beta + 1} \log \frac{100 K}{\alpha v R \beta}$$

iar

$$a = \text{antilog} \left[\frac{1}{\beta + 1} \log \frac{100 K}{\alpha v R \beta} \right]$$

§7.2. REȚELE OPTIME DE EXPLORARE PRIN FORAJE SAU LUCRĂRI MINIERE SUBTERANE A UNOR CORPURI LENTICULARE

Explorările geologice prin foraje sau lucrări miniere subterane, au drept scop economic interceptarea unor acumulări de substanțe minerale utile. În acest capitol ne propunem să dezvoltăm o metodă de optimizare a rețelelor în care trebuie să se efectueze lucrările de explorare a unor corpuri lenticulare (mineralizații de cupru, bauxită etc.), sau a unor structuri petroliere, așa fel încît să crească eficiența lucrărilor la un preț de cost cît mai scăzut.

Prin urmare, trebuie determinată acea rețea de explorare care să asigure o probabilitate mare de interceptare a corpurilor de anumite dimensiuni, cu cele mai scăzute costuri posibile.

În acest fel corpul de minereu devine o „țintă", iar un foraj sau o lucrare minieră subterană un „trăgător". Ne interesează mai întîi probabilitatea atingerii „țintei" dintr-o „tragere".

Vom prezenta în continuare două cazuri frecvente întîlnite în practica explorărilor geologice:

— explorarea prin foraje verticale a unor corpuri care în secțiune orizontală au imaginea unor suprafețe aproximativ circulare. În acest caz este necesar să se determine probabilitatea interceptării suprafeței unui cerc cu cel puțin un punct al unei rețele pătratice de puncte.

— explorarea prin foraje orizontale sau lucrări miniere subterane a unor corpuri care în secțiune verticală au imaginea unor elipse; este necesar să se determine și în acest caz probabilitatea de interceptare a suprafețelor de contur eliptic cu cel puțin un punct al rețelei.

7.2.1. OPTIMIZAREA EXPLORĂRII PRIN FORAJE A UNOR CORPURI CU SECȚIUNE ORIZONTALĂ CIRCULARĂ

Conform teoremei 6.1, probabilitatea interceptării suprafeței unui cerc de diametru D cu cel puțin un punct al unei rețele pătratice de latură a este:

$$P(i) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{a} \right)^2; \quad D < a \sqrt{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea unor rețele optime de explorare a unui anumit perimetru în care se așteaptă să se găsească mineralizații, spre exemplu de bauxită, este necesar fie să se presupună anumite forme și suprafețe (în secțiune orizontală) a lentilelor de bauxită, precum și frecvența fiecărei suprafețe presupuse; fie să se stabilească o statistică a suprafețelor reale în secțiune orizontală a lentilelor de bauxită din vecinătatea perimetrului propus explorării sau dintr-o zonă asemănătoare din punct de vedere genetic.

În cele ce urmează pornim de la un caz presupus cunoscut și dorim să tragem concluzii asupra rețelelor optime în extindere.

Să presupunem următoarele date ale problemei:

— aria suprafeței deja explorate prin foraje este $A_e = 790.000$ m².

— numărul de lentile de bauxită interceptate este $N = 41$.

— aria, în secțiune orizontală a suprafeței utile (aria secțiunilor lentilelor) este $A_u = 67.500$ m².

— indicele de utilitate a suprafeței cercetate $I_u = 8{,}54\%$.

— aria suprafeței presupuse pentru explorare $A_{p.e.} = 1$ mil. m².

— aria suprafeței utile în noul perimetru, posibil să fie pusă în evidență este $A_{p.u.} = A_{p.e.} \times I_u = 85.400$ m².

În tabelul 2.1 se dau: în coloana 1 ariile S_i ale lentilelor găsite prin explorare, în coloana 2 frecvența absolută n_i în perimetrul explorat, în coloana 3 frecvența relativă, în coloana 4 frecvența relativă în procente, iar în coloanele 5—11, probabilitățile de interceptare a suprafețelor lentilelor cu foraje de explorare în rețele pătratice de latură $a = 30$; 40; 50; 60; 80; 100; 120 metri. Aceste probabilități de interceptare au fost calculate cu relația:

$$p(i) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D}{a}\right)^2$$

care devine:

$$p(i) = \frac{S_{\text{lentilă}}}{a^2}$$

punînd $D = 2R$ și asimilînd imaginile lentilelor în secțiune orizontală cu suprafețe circulare, ceea ce nu este departe de realitate în cazul considerat.

În tabelul 2.2, se calculează pentru aceleași suprafețe S_i cu frecvențele relative (în procente) f_i, probabilitățile de neinterceptare $q(a) = 1 - p(a)$ unde prin $p(a)$ am notat probabilitățile de interceptare din tabelul 2.1, pentru fiecare rețea de latură a, precum și numărul de lentile $m = qf_i$ ce nu ar fi fost interceptate din cauza echidistanței rețelei de explorare.

În ultima linie a tabelului 2.2, se notează și numărul total de lentile ce nu ar fi fost interceptate cu rețeaua de latură a.

Frecvențele relative f_i în procente se referă la un total posibil de lentile de 100%.

Pentru alegerea echidistanței rețelei de explorare se poate utiliza una din următoarele metode:

I. Se determină acea echidistanță a rețelei care permite interceptarea lentilei de arie medie cu o probabilitate acceptabilă.

Aria medie va fi:

$$\bar{S} = \frac{\Sigma f_i S_i}{100} = 1650 \text{ m}^2$$

Scanned with OKEN Scanner

Probabilităţile de interceptare a suprafeţei medii cu reţelele de echidistanţe a sînt cele din tabelul 2.3.

Tabelul 2.1.

S_i (m²)	n_i	f	f_i (%)	Probabilitate de interceptare cu reţea $a \times a$						
				30	40	50	60	80	100	120
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
400	14	0,3415	34	0,4444	0,2500	0,1600	0,1111	0,0625	0,0400	0,0278
1 100	12	0,2927	29	1	0,6875	0,4400	0,3055	0,1720	0,1100	0,0764
2 000	6	0,1463	15	1	1	0,8000	0,5555	0,3125	0,2000	0,1400
2 650	3	0,0732	7	1	1	1	0,7360	0,4140	0,2650	0,1840
3 400	2	0,0488	5	1	1	1	0,9444	0,5312	0,3400	0,2360
4 400	2	0,0488	5	1	1	1	1	0,6875	0,4400	0,3055
6 100	1	0,0244	2,4	1	1	1	1	0,9530	0,6100	0,4236
7 200	1	0,0244	2,4	1	1	1	1	1	0,7200	0,5000
Total	41	—	99,8		—	—	—	—	—	—

Tabel 2.2.

S_i	f_i	Probabilitate de neinterceptare şi număr zone neinterceptate													
		30		40		50		60		80		100		120	
m²	%	q	m	q	m	q	m	q	m	q	m	q	m	q	m
400	34	0,5556	19	0,7500	25	0,8400	28	0,890	30	0,9375	32	0,9600	33	1,9722	33
1 100	29	0	0	0,3125	9	0,5600	16	0,6945	20	0,8280	24	0,8900	26	0,9236	27
2 000	15	0	0	0	0	0,2000	3	0,4445	7	0,6875	10	0,8000	12	0,8600	13
2 650	7	0	0	0	0	0	0	0,2640	2	0,5860	4	0,7350	5	0,8160	6
3 400	5	0	0	0	0	0	0	0,0556	0	0,4600	2	0,6600	3	0,7640	4
4 400	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3125	2	0,5600	3	0,6945	3
6 100	2,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0470	0	0,3900	1	0,5764	1
7 200	2,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2800	1	0,5000	1
Total	99,8		19		34		47		59		74		84		88

Tabel 2.3.

a	30	40	50	60	80	100	120
$p(a)$	1	1	0,66	0,46	0,26	0,17	0,11

Se observă că o reţea de 40 × 40 asigură interceptarea tuturor lentilelor cu suprafeţe în secţiune orizontală mai mari sau egale cu suprafaţa medie. O reţea de 50 × 50 asigură interceptarea a 66% din lentilele cu suprafeţe medii.

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că prin această metodă nu se ține seama de faptul că foarte multe lentile (cca 63%) au suprafețe în secțiune orizontală mai mici decît suprafața medie și prin urmare un procent destul de mare de lentile nu ar fi interceptate. Din aceste motive această primă metodă prezintă un criteriu slab de alegere al rețelei optime.

II. O metodă mai bună este aceea prin care rețeaua optimă se determină pentru un procent acceptabil de pierdere din suprafața utilă totală, posibil să existe în zonă. Suprafața totală utilă a procentului total de lentile (100%) este:

$$S_T = 1650 \times 100 = 165\,000 \text{ m}^2$$

Suprafața totală utilă care se poate pierde din cauza echidistanței rețelei va fi:

$$S(a) = \sum_i S_i \times m_i(a)$$

iar procentul de pierdere din suprafața totală utilă este:

$$e(a) = \frac{S(a)}{S_T} \times 100$$

În tabelul 2.4 se calculează procentul de pierdere

Tabel 2.4.

a	30	40	50	60	80	100	120
$e(a)$	5	12	21	32	52	70	76

Se poate construi grafic variația procentului de pierdere din suprafața utilă totală cu valoarea echidistanței rețelei de explorare. Se observă o creștere rapidă a procentului de pierdere cu creșterea echidistanței rețelei de explorare.

Alegerea echidistanței se va face în funcție de un procent de pierdere acceptabil e_0. Astfel se consideră ca rațională acea rețea a_0 pentru care avem $e(a_0) \leqslant e_0$.

Spre exemplu dacă se poate accepta o pierdere de maximum 20%, atunci echidistanța rețelei de explorare este necesar să fie de 50 m.

Se poate utiliza și un criteriu de natură economică și anume se poate compara valoarea cantității de minereu ce s-ar pierde din cauza neinterceptării cu rețeaua de latura a cu cheltuielile totale de explorare și extracție ce s-ar efectua pentru o explorare mai de detaliu (spre exemplu valoarea cantității corespunzătoare pierderii de 20% cu cheltuielile de explorare și extracție pentru echidistanțe mai mici de 50 m). Se alege ca optimă acea echidistanță pentru care valoarea producției este egală cu cheltuielile de explorare și extracție.

Vom indica în continuare un alt criteriu bazat pe minimizarea funcției pierderilor economice rezultate din valoarea producției pierdute și cheltuielilor de explorare.

Dacă A_u este aria suprafeței totale utile din perimetrul cercetat iar $e(a)$ pierderea procentuală funcție de echidistanța rețelei a, atunci aria utilă pierdută va fi:

$$A_u \cdot e(a)$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunînd că valoarea unității de suprafață productivă este v (valoarea producției corespunzătoare acestei suprafețe unitare) valoarea totală pierdută din cauza echidistanței rețelei este:

$$V_1 = \frac{v \cdot A_u \cdot e(a)}{100}$$

Notînd cu $n(a)$ numărul de foraje ce trebuie executate în perimetru într-o rețea a×a și cu c costul unui foraj, atunci cheltuielile totale de explorare vor fi:

$$V_2 = c \cdot n(a)$$

Vor rezulta pierderi economice totale:

$$V = \frac{vA_u \cdot e(a)}{100} + c\, n(a)$$

Echidistanța optimă va fi aceea care realizează condiția min. V, adică o soluție a ecuației:

$$\frac{dV}{da} = 0$$

Pentru aceasta trebuie să se expliciteze funcțiile $e(a)$ și $n(a)$ pentru fiecare caz concret.

Variația lui $e(a)$ se face sub forma unei curbe în „S" a cărei funcție poate să fie una din următoarele:

$$e(a) = \alpha(1 - e^{-\beta e^{\gamma a}})$$

$$e(a) = \frac{\alpha}{1 - (\beta - 1)e^{-\gamma a}}$$

$$e(a) = \alpha e^{-\beta e^{-\gamma a}};\ \log e(a) = \alpha e^{\beta a}$$

Pentru variația lui $n(a)$ s-ar putea accepta o relație hiperbolică:

$$n(a) = B + \frac{D}{a}$$

ținînd seama că numărul de foraje scade odată cu creșterea echidistanței a.

Evident se va lua numărul întreg cel mai apropiat de valoarea $n(a)$ rezultată din funcția hiperbolică.

Introducînd în relația lui V a treia formă a expresiei lui $e(a)$ și expresia lui $n(a)$ se obține:

$$V = \frac{vA_u}{100}\alpha \cdot e^{-\beta e^{-\gamma a}} + cB + \frac{cD}{a}$$

și

$$\frac{dV}{da} = Ke^{-(\gamma a + \beta e^{-\gamma a})} - \frac{cD}{a^2} = 0$$

unde $K = \alpha\beta\gamma \frac{vA_u}{100}$.

Ecuația în a se mai scrie:

$a^2 e^{-(\gamma a + \beta e^{-\gamma a})} = \frac{cD}{K}$ și se poate rezolva pe cale numerică.

Scanned with OKEN Scanner

7.2.2. OPTIMIZAREA EXPLORĂRII CU LUCRĂRI MINIERE SUBTERANE A UNOR CORPURI DE MINEREU LENTICULARE

În cele ce urmează vom trata patru probleme, consecințe ale problemei acului lui Buffon.

Problema 1. Să considerăm o rețea rectangulară plană de puncte echidistante $a \times b$ pe care se aruncă aleator un dreptunghi de dimensiuni $l < a$ și $h \geqslant b$, așa fel încît axa mare a dreptunghiului să rămînă paralelă axelor verticale ale punctelor rețelei (figura 7.2.1).

Dreptunghiul va fi interceptat cu cel puțin un punct al rețelei dacă $x \leqslant \frac{l}{2}$. Dacă $x > \frac{l}{2}$ suprafața dreptunghiului nu va conține nici un punct al rețelei. Se observă deci că probabilitatea de interceptare cu cel puțin un punct al rețelei depinde numai de echidistanța orizontală „a" și dimensiunea mică a dreptunghiului „l".

Condiția $x \leqslant \frac{l}{2}$ de interceptare, revine la condiția ca un segment oarecare $MN = l$ să intercepteze una din axele verticale ale rețelei de puncte. Cum aceste axe verticale sînt paralele, problema devine o problemă a acului lui Buffon cu condiția ca acul să fie aruncat totdeauna perpendicular pe direcția dreptelor paralele.

Prin urmare în cazul acestei probleme probabilitatea interceptării suprafeței unui dreptunghi cu cel puțin un punct al rețelei de puncte situate în echidistanța $a \times b$ este $P\left(x \leqslant \frac{l}{2}\right) = \frac{l}{a}$

Problema 2. Pe aceeași rețea rectangulară, considerăm că aruncăm un dreptunghi de dimensiuni $l \geqslant a$ și $h < b$ orientat astfel încît axa mare a dreptunghiului să rămînă mereu paralelă cu axele orizontale ale punctelor rețelei, (fig. 7.2.2).

După aruncare, dreptunghiul va acoperi cel puțin un punct al rețelei, numai dacă distanța dintre axul central al dreptunghiului și axa orizontală cea mai apropiată a punctelor rețelei este mai mică decît $\frac{h}{2}$, adică $y \leqslant \frac{h}{2}$.

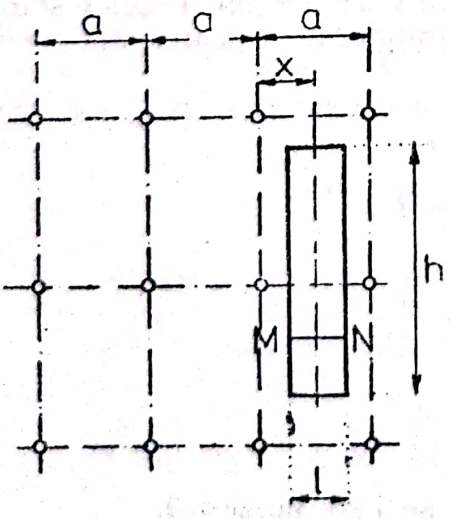

Fig. 7.2.1

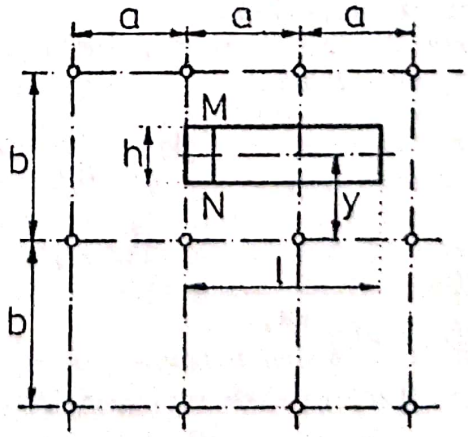

Fig. 7.2.2

Scanned with OKEN Scanner

Situaţia este similară celei din problema 1. Probabilitatea de acoperire a unui punct al reţelei cu suprafaţa dreptunghiului va fi egală cu probabilitatea de interceptare a unei paralele orizontale cu un segment $MN = h < b$ aruncat întîmplător dar orientat perpendicular pe direcţia paralelelor.

Prin urmare

$$P\left(y \leqslant \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{b}$$

Problema 3. Pe o reţea rectangulară $a \times b$ se aruncă întîmplător un dreptunghi de dimensiuni $l < a$ şi $h < b$, aşa fel încît axele dreptunghiului să rămînă mereu paralele cu un sistem de două axe perpendiculare ce trec prin punctele reţelei (fig. 7.2.3).

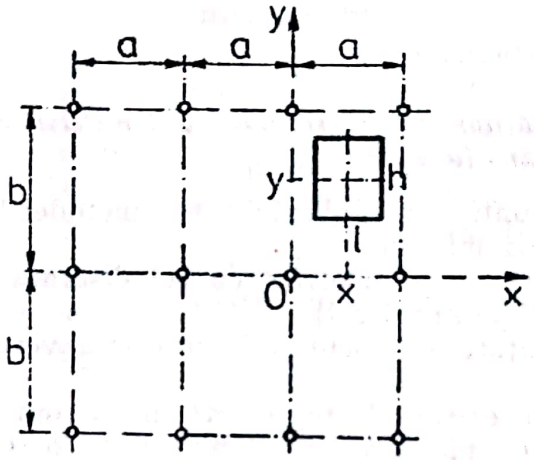

Fig. 7.2.3

În cazurile în care $x > \frac{l}{2}$ şi y oarecare sau $y > \frac{h}{2}$ şi x oarecare, dreptunghiul nu va acoperi nici un punct al reţelei. Dacă $x \leqslant \frac{l}{2}$ şi $y \leqslant \frac{h}{2}$ dreptunghiul va acoperi un punct al reţelei.

Notăm:

E_1 — evenimentul ce constă în obţinerea unei distanţe $x \leqslant \frac{l}{2}$

E_2 — evenimentul ce constă în obţinerea unei distanţe $y \leqslant \frac{h}{2}$

Cele două evenimente sînt independente, astfel că evenimentul E, ce constă în realizarea simultană a relaţiilor $x \leqslant \frac{l}{2}$ şi $y \leqslant \frac{h}{2}$ este intersecţia evenimentelor E_1 şi E_2, adică

$$E = E_1 \cap E_2$$

Rezultă că probabilitatea lui E va fi produsul probabilităţilor evenimentelor E_1 şi E_2, adică

$$P\left(x \leqslant \frac{l}{2};\ y \leqslant \frac{h}{2}\right) = P\left(x \leqslant \frac{l}{2}\right) P\left(y \leqslant \frac{h}{2}\right)$$

Printr-o analiză asemănătoare celei efectuate în cazurile precedente, prin care problema se reduce la problema acului lui Buffon, rezultă

$$P\left(x \leqslant \frac{l}{2}\right) = \frac{l}{a} \quad \text{și}$$

$$P\left(y \leqslant \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{b}$$

și prin urmare

$$P\left(x \leqslant \frac{l}{2};\ y \leqslant \frac{h}{2}\right) = \frac{l \cdot h}{a \cdot b} = \frac{s}{S}$$

unde s este suprafața dreptunghiului iar S suprafața unui ochi al rețelei rectangulare.

Aplicații practice

Calculul probabilităților de interceptare a lentilelor cu rețele volumetrice de explorare (rețele plane la diferite cote)

Se analizează în continuare aplicabilitatea metodei la rețelele de explorare în cazul unei exploatări miniere.

Să considerăm o rețea volumetrică cu echidistanța „a" în plan orizontal și „b" în plan vertical (figura 7.2.4).

În figură este schițată și o lentilă în proiecția verticală cu lungimea l și înălțimea h.

Fiecare rețea plană orizontală reprezintă un orizont (H_1; H_2; H_3).

La fel, fiecare rețea plană verticală reprezintă o secțiune notată S_1; S_2; S_3; S_4.

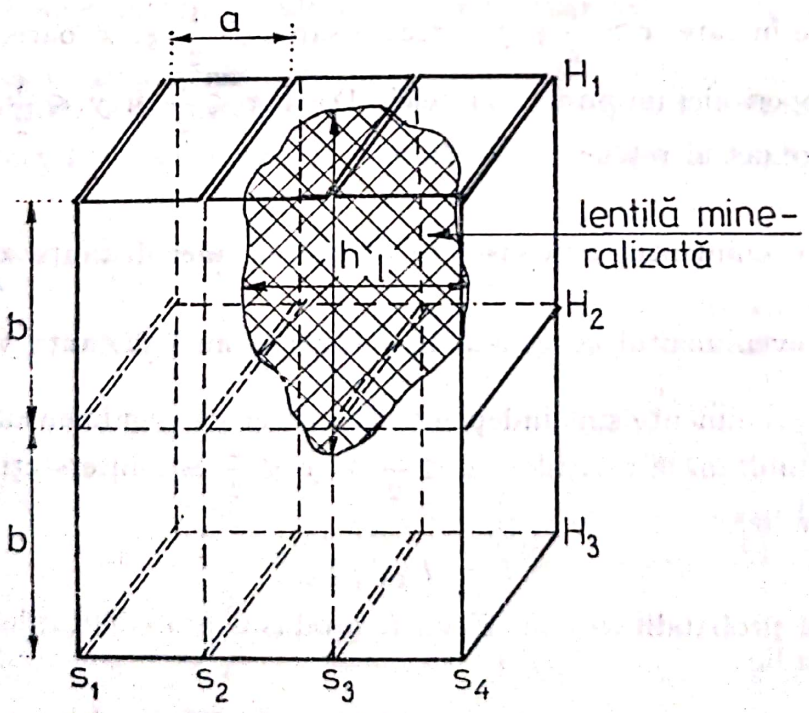

Fig. 7.2.4

Scanned with OKEN Scanner

În această analiză nu se ține seama de grosimea lentilelor deoarece, prin lucrările transversale se probează întreaga lor grosime.

Comparînd dimensiunile lentilelor (lungime l și înălțime h) cu echidistanțele rețelei volumetrice — „a" în plan orizontal și „b" în plan vertical — pot rezulta următoarele situații:

1. Lentile cu $l \geqslant a$ și $h \geqslant b$

Probabilitatea de interceptare a unei astfel de lentile cu o rețea volumetrică $a \times b$, este unu, adică $P = 1$.

2. Lentile cu $l < a$ și $h \geqslant b$.

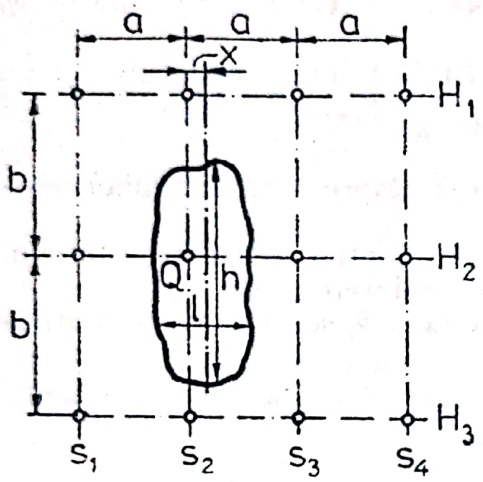

Fig. 7.2.5.

Se pot întîmpla următoarele două situații:

— lentila cade între lucrări și nu este interceptată;

— lentila este interceptată de cel puțin o lucrare la un orizont.

Problema revine la a considera o rețea de puncte așezate echidistant $a \times b$, într-un plan și a arunca pe acest plan o suprafață echivalentă suprafeței lentilei în secțiune verticală. Aruncarea se consideră întîmplătoare, însă așa fel încît axa „h" a lentilei să fie verticală (figura 7.2.5).

Probabilitatea de interceptare a lentilei este influențată doar de echidistanța rețelei plane orizontale „a" și lungimea „l" a lentilei.

Notînd cu „x" distanța dintre axul central vertical al suprafeței lentilei și linia de lucrări cea mai apropiată se observă că dacă $x \leqslant \frac{l}{2}$ cel puțin o lucrare interceptează suprafața lentilei.

Dacă $x > \frac{l}{2}$ nici o lucrare nu va intercepta lentila. Probabilitatea de interceptare va fi dată de relația $P\left(x \leqslant \frac{l}{2}\right) = \frac{l}{a}$ conform problemei 1.

3. Lentile cu $l \geqslant a$ și $h < b$.

Se pot întîmpla următoarele două situații:

— lentila cade între lucrări și nu este interceptată;

— lentila este interceptată de cel puțin o lucrare a unui orizont.

În acest caz nu va mai fi interceptată și de altă lucrare a orizontului superior sau inferior.

Sîntem exact în cazul problemei 2 și prin urmare probabilitatea de interceptare va fi

$$P = \frac{h}{b}$$

4. Lentile cu $l < a$ și $h < b$.

La fel, se pot întîmpla două situații:

— lentila cade între lucrări și nu este interceptată;

— lentila este interceptată de o lucrare la un orizont.

Scanned with OKEN Scanner

Probabilitatea de interceptare depinde de suprafaţa lentilei $s = h \cdot l$ şi suprafaţa unui ochi al reţelei $S = a \cdot b$. (cazul problemei 3)

Vom avea

$$P = \frac{s}{S} = \frac{h \cdot l}{a \cdot b}$$

Calculul volumului de rezerve neinterceptate prin utilizarea diferitelor reţele de explorare.

Fiecărei lentile de dimensiuni $l_i \times h_i$, în secţiune verticală îi corespunde un volum de rezerve R_i.

Să presupunem că într-o zonă cunoscută au fost interceptate cu o reţea detaliată de lucrări, „r" lentile cu o rezervă totală $R = \sum_{i=1}^{r} R_i$

Ne interesează, în procente, rezerva neinterceptată prin utilizarea unor reţele de explorare mai largi.

Cunoscînd şi cantitatea de metal Q_i din fiecare lentilă, se poate determina şi cantitatea de metal corespunzătoare lentilelor neinterceptate.

În raport cu dimensiunile fiecărei reţele alese ($a \times b$) se pot ordona lentilele în următoarele patru clase:

1) $l \geqslant a$ şi $h \geqslant b$
2) $l < a$ şi $h \geqslant b$
3) $l \geqslant a$ şi $h < b$
4) $l < a$ şi $h < b$

Lentilele din clasa (1) au probabilitate de interceptare unu şi nu sînt pierdute.

Să considerăm că există „p" lentile în clasa (2), $i = 1, \ldots, p$.

Probabilitatea de interceptare a unei lentile din această clasă este

$$P_i = \frac{l_i}{a} \text{ cu } i = 1, 2, \ldots, p$$

Probabilitatea de neinterceptare va fi

$$1 - \frac{l_i}{a}$$

şi prin urmare rezerva neinterceptată:

$$R_i \left(1 - \frac{l_i}{a}\right)$$

Va rezulta o rezervă totală neinterceptată pentru lentilele din clasa (2) egală cu

$$\sum_{i=1}^{p} R_i \left(1 - \frac{l_i}{a}\right)$$

Analog pentru lentilele din clasa (3) vom obţine o rezervă neinterceptată egală cu

$$\sum_{i=p+1}^{q} R_i \left(1 - \frac{h_i}{b}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Probabilitatea de interceptare depinde de suprafaţa lentilei $s = h \cdot l$ şi suprafaţa unui ochi al reţelei $S = a \cdot b$. (cazul problemei 3)

Vom avea

$$P = \frac{s}{S} = \frac{h \cdot l}{a \cdot b}$$

Calculul volumului de rezerve neinterceptate prin utilizarea diferitelor reţele de explorare.

Fiecărei lentile de dimensiuni $l_i \times h_i$, în secţiune verticală îi corespunde un volum de rezerve R_i.

Să presupunem că într-o zonă cunoscută au fost interceptate cu o reţea detaliată de lucrări, „r" lentile cu o rezervă totală $R = \sum_{i=1}^{r} R_i$

Ne interesează, în procente, rezerva neinterceptată prin utilizarea unor reţele de explorare mai largi.

Cunoscînd şi cantitatea de metal Q_i din fiecare lentilă, se poate determina şi cantitatea de metal corespunzătoare lentilelor neinterceptate.

În raport cu dimensiunile fiecărei reţele alese ($a \times b$) se pot ordona lentilele în următoarele patru clase:

1) $l \geqslant a$ şi $h \geqslant b$
2) $l < a$ şi $h \geqslant b$
3) $l \geqslant a$ şi $h < b$
4) $l < a$ şi $h < b$

Lentilele din clasa (1) au probabilitate de interceptare unu şi nu sînt pierdute.

Să considerăm că există „p" lentile în clasa (2), $i = 1, \ldots, p$.

Probabilitatea de interceptare a unei lentile din această clasă este

$$P_i = \frac{l_i}{a} \text{ cu } i = 1, 2, \ldots, p$$

Probabilitatea de neinterceptare va fi

$$1 - \frac{l_i}{a}$$

şi prin urmare rezerva neinterceptată:

$$R_i\left(1 - \frac{l_i}{a}\right)$$

Va rezulta o rezervă totală neinterceptată pentru lentilele din clasa (2) egală cu

$$\sum_{i=1}^{p} R_i\left(1 - \frac{l_i}{a}\right)$$

Analog pentru lentilele din clasa (3) vom obţine o rezervă neinterceptată egală cu

$$\sum_{i=p+1}^{q} R_i\left(1 - \frac{h_i}{b}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Probabilitatea de neinterceptare a lentilelor din clasa (4) este

$$1 - \frac{l_i\, h_i}{a \cdot b}$$

şi prin urmare va rezulta o rezervă neinterceptată egală cu

$$\sum_{i=q+1}^{t} R_i \left(1 - \frac{l_i\, h_i}{a \cdot b}\right)$$

Rezerva totală neinterceptată prin utilizarea unei reţele de explorare $a \times b$ va fi

$$R^* = \sum_{i=1}^{p} R_i \left(1 - \frac{l_i}{a}\right) + \sum_{i=p+1}^{q} R_i \left(1 - \frac{h_i}{b}\right) + \sum_{i=q+1}^{t} R_i \left(1 - \frac{l_i\, h_i}{a \cdot b}\right)$$

În procente, rezerva de minereu neinterceptată va fi

$$\frac{R^*}{R} \cdot 100$$

Dacă în locul rezervei de minereu am fi considerat rezerva de metal Q_i a fiecărei lentile, s-ar fi obţinut o rezervă de metal Q^* corespunzătoare lentilelor neinterceptate, adică în procente

$$\frac{Q^*}{Q} \cdot 100,$$

unde prin Q am notat rezervă totală de metal.

Conţinutul mediu în metal iniţial $C_m = \frac{Q}{R}$ ar deveni după aplicarea reţelei $a \times b$

$$C_m^* = \frac{Q - Q^*}{R - R^*}$$

Eroarea ce s-ar face asupra conţinutului mediu este $C_m - C_m^*$, sau în procente faţă de conţinutul mediu iniţial

$$\frac{C_m - C_m^*}{C_m} \cdot 100$$

Efectuînd aceste calcule pentru diferite reţele de explorare obţinute prin varierea dimensiunilor a şi b, se poate stabili o reţea care să permită evidenţierea rezervei de minereu şi metal în limita unor erori acceptabile, dar cu cheltuieli minime.

Aplicaţie numerică la calculul rezervelor neinterceptate de minereu şi metal pentru diferite reţele de explorare $a \times b$
(a — echidistanţa lucrărilor transversale;
b — echidistanţa orizonturilor)

Să presupunem că s-a efectuat o statistică a rezervelor lentilelor din zona zăcămîntului considerat, după lungimea (l) şi înălţimea (h).

Scanned with OKEN Scanner

Modul de întocmire a statisticii nu prezintă nici un inconvenient, aşa încît nu vom prezenta decît rezultatele sub formă grafică.

Ţinînd seama de metodologia prezentată, s-a calculat pentru fiecare lentilă de dimensiuni $l \times h$, probabilităţile de interceptare cu reţele de explorare $a \times b$ şi s-au determinat apoi rezervele de minereu şi metal neinterceptate (în procente).

În figura 7.2.6 se prezintă variaţia rezervei de minereu şi metal neinterceptată (în procente din rezerva totală). În funcţie de echidistanţa lucrărilor transversale „a" s-a obţinut o familie de curbe pentru diverse echidistanţe între orizonturi „b".

Se observă că rezerva neinterceptată variază de la 1% pentru o reţea de 50 × 30, pînă la 17% pentru o reţea de explorare de 100 × 80.

Dacă se vor continua explorările cu reţeaua actuală de 50 × 50, se va aştepta ca cca 5% din rezerva existentă să nu fie interceptată.

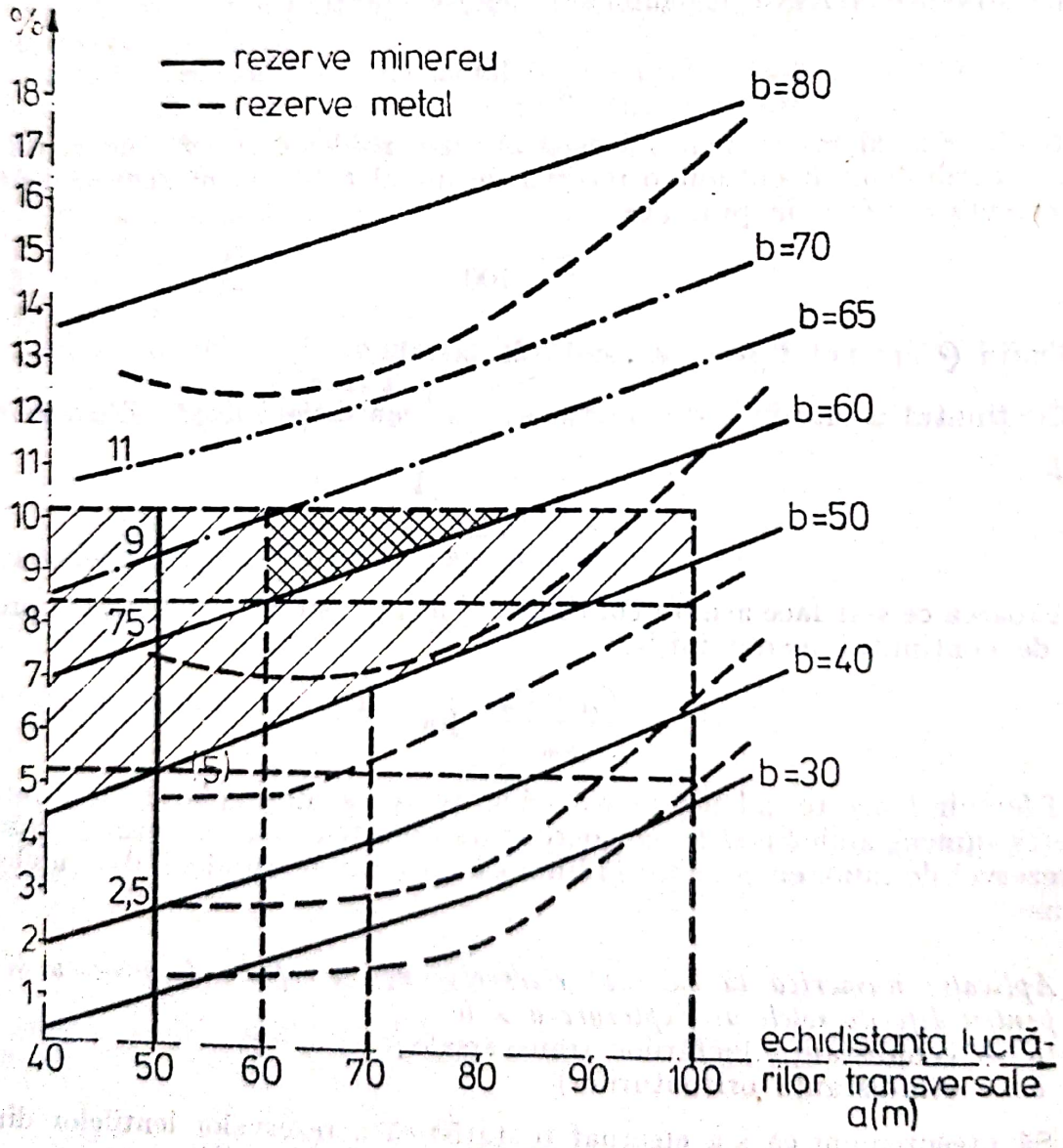

Fig. 7.2.6

Scanned with OKEN Scanner

Rezervă neinterceptată nu înseamnă neapărat și rezervă pierdută, deoarece în procesul de exploatare o bună parte din această rezervă va fi descoperită și extrasă.

Pe baza acestei abace se poate face o analiză a rețelelor de explorare, pentru erori date de neinterceptare.

Dacă din considerente legate de asigurarea rezervelor pentru exploatare și creșterea vitezei de explorare este necesar să se mărească echidistanțele a și b peste valorile actuale ($a > 50$ și $b > 50$) și dacă se poate accepta ca cel mult 10% din rezerva de minereu să nu fie interceptată, atunci se pot propune rețelele date în tabela 2.1.

În abacă, domeniul rețelelor acceptabile este haşurat.

Tabela 2.1.

Eroare de neinterceptare acceptată	Rețele echivalente pentru o eroare dată de neinterceptare $a \times b$					
10%	50×67,5	60×66	70×64	80×62	90×60	100×55
9%	50×65	60×63	70×60	80×58	90×55	100×50
8%	50×62	60×60	70×55	80×52	90×50	—
7%	50×58	60×55	70×50	—	—	—
6%	50×54	60×50	—	—	—	—
5%	50×50	—	—	—	—	—

O primă constatare este aceea că în timp ce echidistanța între lucrările transversale variază de la 50 m la 100 m, echidistanța orizonturilor variază mai puțin, între 50 m și 67,5 m, evident pentru erori de neinterceptare a rezervelor între 5—10%.

Aceasta înseamnă că, creșterea erorilor de neinterceptare a lentilelor se face mai mult pe seama creșterii echidistanței între orizonturi și mai puțin pe seama creșterii echidistanței între transversări.

Pentru alegerea unei rețele optime este necesar să intervină în analiză și un criteriu economic. Acest criteriu poate rezulta din compararea economiilor realizate prin lărgirea rețelei de explorare cu creșterea costurilor de extracție datorate unor lucrări suplimentare necesare unor rețele mai largi.

Considerațiuni economice legate de acceptarea unei erori de neinterceptare

Vom considera ipoteza cea mai defavorabilă și anume aceea că rezerva neinterceptată cu o rețea $a \times b$ este și pierdută, presupunînd că nici în cursul exploatării această rezervă nu este descoperită.

În acest caz, cheltuielile de explorare scad cu creșterea echidistanțelor rețelelor, iar prețul de cost al extracției va crește, deoarece se va raporta la o cantitate mai mică de rezervă extrasă.

Să considerăm costurile de explorare, deschidere și pregătire pe m² cele din tabela 2.2.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 2.2

Eroare de neinterceptare acceptată	Costuri de exploarare, deschidere și pregătire pentru rețelele din tab. 2.1			
10%	422	315	302	307
9%	390	330	330	326
8%	452	376	352	342
7%	478	398	375	—
6%	509	421	—	—
5%	468	—	—	—

Față de costul lucrărilor de explorare, deschidere și pregătire corespunzător rețelei actuale de explorare 50 × 50, rezultă o variație în plus sau în minus a costurilor rețelelor $a \times b$ după cum urmează (tabela 2.3).

Tabela 2.3

Eroare de neinterceptare acceptată	Variația costurilor față de costul actual				Rezerva interceptată (tone)
10%	−46	−153	−166	−161	9,90
9%	−78	−138	−138	−142	10,00
8%	−18	− 92	−116	−126	10,12
7%	10	− 70	− 93	—	10,23
6%	41	− 47	—	—	10,34
5%	0	—	—	—	10,45

Presupunem că unui m² de suprafață explorată îi corespunde 11 tone minereu, iar prețul de cost al tonei extrase este de 131,55 lei/t.

Presupunînd că rezerva neinterceptată cu o rețea $a \times b$ este și pierdută, rezultă că, costul actual corespunzător unui m² extras

$$131{,}55 \times 11 = 1447{,}05 \text{ lei}$$

se va repartiza la o rezervă mai mică, ce rezultă din micșorarea rezervei de 11 tone cu eroarea de neinterceptare.

Spre exemplu pentru 10% eroare de neinterceptare, va rezulta o rezervă interceptată și deci extrasă de 9,9 tone care vor costa 1447,05 lei, adică cca 146 lei/tonă.

S-a obținut o creștere a prețului de extracție cu cca 14 lei/tonă.

În tabela 2.4 (ultima coloană) sînt trecute aceste creșteri ale costurilor de extracție.

Dacă variația costurilor de explorare, deschidere și pregătire, față de costul actual se raportează la cantitatea de minereu interceptată, vom găsi valoarea economiilor realizate pe tonă, din mărirea rețelei de explorare.

În tabela 2.4 se dau economiile realizate prin lărgirea rețelelor luate în considerare.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 2.4

Eroare de neinterceptare acceptată	Economii pe tonă provenite din lărgirea rețelelor de explorare				Creșteri preț cost lei pe tona extrasă
10%	−4,6	−15,5	−16,7	−16,3	14,0
9%	−7,8	−13,8	−13,8	−14,2	12,7
8%	−1,8	− 9,1	−11,3	−12,5	11,0
7%	0,9	− 6,8	− 9,1	—	9,4
6%	4,0	− 4,5	—	—	8,0
5%	0	—	—	—	—

Ținînd seama de creșterile costului extracției pe tonă, vor rezulta următoarele economii realizate prin lărgirea rețelelor de explorare (tabela 2.5).

Tabela 2.5

Eroare de neinterceptare acceptată	Economii reale pe tona de minereu interceptată			
10%	9,6	−1,5	−2,7	−2,3
9%	4,9	−1,1	−1,1	−1,5
8%	9,2	1,9	−0,3	−1,5
7%	10,3	2,6	0,3	—
6%	12,0	3,5	—	—
5%	—	—	—	—

Se observă că economiile cele mai mari pe tona de minereu interceptată le aduce rețeaua de 90 × 60 cu 2,7 lei/t, urmată de rețeaua de 100 × 55 cu 2,3 lei/t și rețelele 75 × 65; 100 × 50; 90 × 50 cu 1.5 lei/tonă.

Dacă se ține seama însă de necesitatea asigurării unui volum mai mare de rezervă deschisă și de necesitatea obținerii unor parametri geologici cît mai aproape de realitate, atunci va trebui să alegem rețeaua cu cea mai mare distanță între orizonturi și cea mai mică distață între lucrările transversale.

Dintre rețelele ce asigură o economicitate, cea care satisface și aceste condiții este numai rețeaua de 75 × 65 (75 m între lucrările transversale și 65 m între orizonturi).

În concluzie, se observă cum cu ajutorul unei extinderi a problemei acului lui Buffon, se poate face o analiză probabilistică a rețelelor de explorare și se poate crea un criteriu economic pentru a decide asupra rețelei celei mai raționale.

§7.3. PROGNOZA ZONELOR DE MINERALIZARE

În cele ce urmează vom utiliza unele din rezultatele obținute în capitolele precedente, pentru a elabora un model de estimare a numărului total al corpurilor de minereu posibil să existe într-o zonă în care s-au efectuat, fie explorări prin foraje, fie o prospecțiune geofizică printr-o metodă corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm mai întîi cazul unei explorări prin foraje într-o rețea pătratică a unor corpuri lenticulare.

În paragraful 3—6 cap. 3, se arată că probabilitatea interceptării unei lentile cu cel puțin un foraj, este:

$$P(i) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D}{a}\right)^2 \text{ cu } D < a\sqrt{2}$$

unde D este diametrul mediu presupus al proiecției lentilei în plan orizontal, iar numărul total de lentile de diametru D este estimat cu ajutorul relației:

$$\hat{N} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{a}{D}\right)^2 f(D)$$

unde prin $f(D)$ am notat numărul de lentile interceptate de diametru D.

În cazul în care avem lentile de diferite mărimi $D_j < a\sqrt{2}$ atunci numărul total estimat va fi:

$$\hat{N}_{total} = \frac{4a^2}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{f_j}{D_j^2}$$

unde, prin n am notat numărul de mărimi distincte ale lentilelor.

Să presupunem că prin explorările executate au fost interceptate un număr oarecare de lentile de diametre diferite și că s-a determinat următoarea distribuție a mărimilor diametrelor $D_j < a\sqrt{2}$:

$$\begin{pmatrix} D_1; & D_2 & \dots & D_n \\ f_1; & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix}$$

Mărimea medie a acestor diametre va fi:

$$\bar{D} = \frac{\sum_j f_j D_j}{\sum_j f_j}$$

Aria suprafeței medii în secțiune orizontală este aproximativ:

$$\bar{A} = \pi\frac{\bar{D}^2}{4}$$

Rezultă o arie totală utilă (arie de prognoză) pentru lentile cu $D_j < a\sqrt{2}$:

$$\bar{A} = \frac{\pi}{4}\bar{D}^2\hat{N}_{total}$$

La această arie totală trebuie să fie adăugată aria secțiunilor lentilelor cu $D_j \geq a\sqrt{2}$, în cazul în care au fost interceptate și astfel de lentile. Evident $P(i) = 1$ pentru aceste lentile și numărul interceptat este chiar numărul total existent.

Notînd cu B aria acestor secțiuni, rezultă aria totală pentru orice D_j:

$$A_T = \frac{\pi}{4}\bar{D}^2\hat{N}_{total} + B$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru orice tip de mineralizații și regiune metalogenetică, se poate aprecia prin studii geologice o densitate medie de mineralizare, b tone/m^2.

Rezultă o rezervă de minereu de prognoză:

$$Q = b\left[\frac{\pi}{4}\bar{D}^2\hat{N}_{total} + B\right]$$

Să considerăm acum o zonă cu posibilități de mineralizare sub formă de filoane de diferite lungimi și grosimi neglijabile în raport cu lungimile. Evident numărul real de filoane nu este cunoscut apriori.

Cercetarea și descoperirea filoanelor mineralizate se poate face aplicînd o metodă geofizică sau geochimică de cercetare la suprafața solului, metode aplicate pe o rețea de echidistanță dată. Proiecția filoanelor pe o suprafață orizontală (suprafața solului) se poate materializa prin segmente de lungimi diferite l_i.

Rețeaua de cercetare, de regulă, este o rețea de profile (aliniamente) paralele de echidistanțe „a".

Se presupune o așezare întîmplătoare a rețelei de cercetare pe suprafața mineralizată.

Aplicînd metodele de cercetare geofizică sau geochimică pe aliniamentele rețelei, se vor obține în unele puncte valori anomale față de valorile de fond ale regiunii.

Prin interpretarea geologo-geofizică a regiunii se pot separa dintre valorile anomale acelea care sînt cauzate de filoanele mineralizate.

Poziția topografică a acestei valori anomale (coordonatele pe aliniament) indică locul de interceptare a filonului cu un aliniament al rețelei.

Pe baza datelor cunoscute în urma cercetării ne propunem să estimăm numărul total, posibil, de filoane, lungimea lor medie, precum și rezerva de minereu.

Numărul estimat de filoane de o anumită lungime l_i cu $l_i < a$, este (conf. paragraf. 3—6):

$$\hat{N}_{estim}(l_i) = \frac{a}{l_i} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_i$$

unde f_i este numărul de filoane de lungime l_i interceptate cu rețeaua dată de cercetare, orientată întîmplător.

Numărul total de filoane, indiferent de lungime, dar cu $l_i < a$ va fi:

$$\hat{N}_{total\ estimat} = a\frac{\pi}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{l_i}$$

Pentru rețele orientate perpendicular pe direcția de mineralizare, relația se scrie:

$$\hat{N}_{total\ estimat} = a\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{l_i}$$

Să presupunem că în urma unei cercetări geofizice cu o rețea de echidistanță $a = 100$ m au fost evidențiate un număr oarecare de zone anomale care, veri-

Scanned with OKEN Scanner

ficate prin lucrări miniere de explorare, au indicat următoarele filoane:

7 filoane cu $l = 20$ m
4 filoane cu $l = 30$ m
3 filoane cu $l = 50$ m
2 filoane cu $l = 80$ m
1 filon cu $l = 100$ m
1 filon cu $l = 200$ m
1 filon cu $l = 500$ m

Numărul total estimat de filoane cu $l < 100$ m va fi:

$\hat{N}_{\text{total estimat}} = 100 \left(\frac{7}{20} + \frac{4}{30} + \frac{3}{50} + \frac{2}{80} \right) = 57$ filoane. Ținînd seama că au mai fost interceptate 3 filoane cu $l > 100$ m, înseamnă că numărul total de filoane estimate este de 60.

Lungimea medie a filoanelor interceptate cu $l < 100$ m este:

$$\overline{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = 36$$

Rezultă o lungime totală mineralizată (lungime cumulată a tuturor filoanelor cu $l < 100$ și $l > 100$):

$$L = 36 \times 57 + 800 = 2852 \text{ m}$$

Dacă se poate aprecia o densitate de mineralizare pe metru liniar (b tone/m) atunci se poate prognoza o rezervă de minereu:

$$Q = b \cdot L(\text{tone}) = 2852\ b \text{ (tone)}$$

Dacă în loc de un zăcămînt filonian se cercetează un zăcămînt lenticular și dacă secțiunile în plan orizontal al diferitelor corpuri mineralizate pot fi asimilate unor suprafețe circulare cu diametre D_i, atunci pentru determinarea numărului estimat de corpuri și a valorii așteptate a diametrelor aparente se vor aplica relațiile (conf. paragraf. 3.6):

$$\hat{N}_{\text{total estimat}} = a \sum_{i=1}^{n} \frac{f(D_i)}{D_i}$$

și

$$E(l) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2 P(D_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(D_i) D_i}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu datele din exemplul precedent, considerînd lungimile l drept diametre, avem :

$$N_{total\ estimat} = 57 + 3 = 60 (57 \text{ corpuri cu } D \leqslant a)$$

$$E(l) \approx 37 \text{ m, pentru cercuri cu } D < 100$$

Se poate şi în acest caz estima o rezervă de prognoză după acelaşi procedeu.

§7.4. SEMIVARIOGRAMA ELEMENTELOR GEOMETRICE. ANALIZĂ STRUCTURALĂ. APLICAŢII ÎN GEOLOGIE.

7.4.1. DEFINIŢIA SEMIVARIOGRAMEI

În natură, elementele geometrice ale unui corp de minereu sau ale unei secţiuni după un anumit plan de secţionare reprezintă o variabilă naturală rezultată din compunerea unor efecte determinate fizic (efecte datorate fenomenului general de mineralizare) cu efecte aleatoare datorate condiţiilor locale în care s-a depus mineralizaţia. Spre exemplu, pe o fractură majoră au venit soluţii mineralizatoare care au format un corp filonian. Grosimile filonului într-o secţinue orizontală la un anumit nivel formează o astfel de variabilă naturală care are o variaţie regională (tendinţă regională datorată pasului faliei majore peste care s-au suprapus variaţii aleatoare datorită condiţiilor locale.

Principial această variabilă naturală se poate scrie sub forma [79] :

$$f(P) = \varphi(P) + \varepsilon(P)$$

unde $\varphi(P)$ reprezintă componenta tendinţei regionale iar $\varepsilon(P)$ componenta variaţiei locale în punctul (P) dintr-un plan orizontal de secţiune.

Componenta tendinţei regionale poate fi considerată ca un proces generator de valori ale unei variabile stochastice cu continuitate în medie, iar componenta locală $\varepsilon(P)$ ca un proces generator de valori aleatoare (abateri aleatoare).

Funcţia $\varphi(P)$ a tendinţei regionale poate fi exprimată printr-o reprezentare continuă de un anumit tip, în timp ce $\varepsilon(P)$ poate fi studiată prin analiză statistică.

Cele două efecte sînt suprapuse şi este greu să fie separate corect.

Într-o primă aproximaţie s-ar putea considera $\varphi(P)$ ca o funcţie polinomială.

Dacă se cunosc o serie de valori în puncte discrete ale variabilei naturale $f(P)$ atunci se poate determina funcţia polinomială $\varphi(P)$ reprezentarea căreia va da tendinţa regională şi apoi abaterile $\varepsilon(P) = f(P) - \varphi(P)$ care dau variaţia locală.

Problema pe care ne-o punem în continuare este ca să efectuăm o analiză structurală, în sensul de a descoperi structurile regionale şi locale ale unui fenomen de mineralizare, prin studierea variaţiei grosimilor mineralizate în puncte discrete cu ajutorul noţiunii de semivariogramă a variabilei naturale compuse.

Sînt frecvente cazurile practice în care variaţia funcţiei $f(P)$ este foarte neregulată şi deci greu de exprimat tendinţa regională printr-o funcţie continuă cunoscută.

Scanned with OKEN Scanner

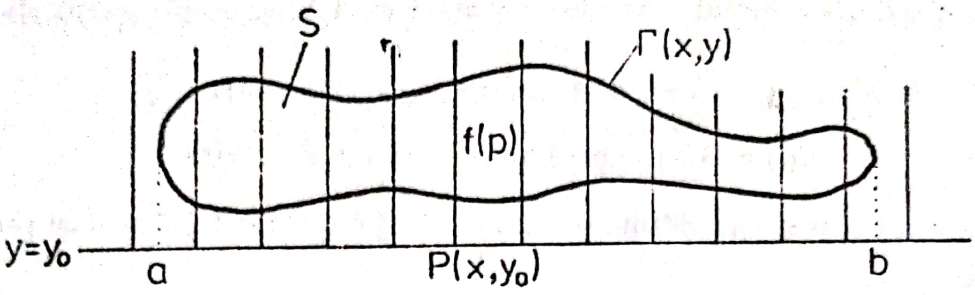

Fig. 7.4.1

Pentru aceasta să presupunem că în corpul mineralizat au fost executate la un anumit nivel (orizont) lucrări de explorare paralele la echidistanță dată „d". Problema este asemănătoare secționării unei suprafețe S de contur oarecare cu o rețea de linii paralele echidistante cu „d" (fig. 7.4.1).

Valorile funcției $f(P)$ se definesc ca lungimi ale segmentelor rezultate prin intersecția conturului suprafeței cu rețeaua de linii paralele.

Pentru analiza structurală a variației funcției $f(P)$ vom defini mai întîi teoretic noțiunile de variogramă și covariogramă.

Definiție. Fie $S \subset R^2$ o suprafață de contur oarecare $\Gamma(x, y) = 0$; $P(x, y_0)$ un punct pe dreapta $y = y_0$ cu $x \in [a, b]$, și $f(P)$ o funcție ce definește lungimea segmentelor formate prin intersecția conturului $\Gamma(x, y) = 0$ cu perpendicularele în punctul $P(x, y_0)$ pe dreapta $y = y_0$. Notînd cu h distanța dintre două puncte de pe dreapta $y = y_0$ se definește:

— variograma funcției $f(x, y_0)$:

$$2V(h) = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x+h, y_0) - f(x, y_0)]^2 \, dx$$

— covariograma funcției $f(x, y_0)$:

$$C(h) = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x+h, y_0) - m][f(x, y_0) - m] \, dx$$

unde m este valoarea medie a variabilei $f(x, y_0)$ adică

$$m = E[f(x, y_0)] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x, y_0) \, dx$$

iar a și b sînt limitele intervalului de variație a lui x astfel încît perpendicularele în a și b pe dreapta $y = y_0$ sînt tangente conturului suprafeței S.

Între covariograma $C(h)$ și semivariograma $V(h)$ există relația:

$$V(h) = C(0) - C(h)$$

unde $C(0)$ este valoarea covariogramei funcției $f(P)$ pentru $h = 0$ adică tocmai varianța de dispersie.

$$C(0) = D^2[f(x, y_0)] = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x, y_0) - m]^2 \, dx$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație

Se calculează:

$$C(0) - C(h) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \{[f(x, y_0) - m]^2 - [f(x+h, y_0) - m][f(x, y_0) - m]\}dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b [f^2(x, y_0) + m^2 - 2mf(x, y_0) - f(x+h, y_0)f(x, y_0) +$$

$$+ mf(x+h, y_0) + mf(x, y_0) - m^2]dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f^2(x, y_0) -$$

$$- 2f(x+h, y_0)f(x, y_0) + f^2(x+h, y_0)]dx$$

deoarece

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x, y_0)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x+h, y_0)dx$$

Rezultă imediat

$$C(0) - C(h) = V(h)$$

Semivariograma și covariograma exprimă cantitativ, prima deosebirea, iar cea de-a doua, similitudinea dintre valorile funcției naturale $f(P)$ în două puncte distanțate cu h.

Semivariograma funcției naturale $f(P)$ este o funcție nenegativă prin definiție iar derivata sa vom arăta că este pozitivă pentru orice h.

Prin derivare rezultă:

$$\frac{dV(h)}{dh} = -\frac{dC(h)}{dh}$$

iar din definiție

$$\frac{dC(h)}{dh} = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x, y_0) - m]\frac{df(x+h, y_0)}{dh}dx =$$

$$= \frac{d}{dh}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x+h, y_0)[f(x, y_0) - m]dx\right\} =$$

$$= \frac{d}{dh}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x+h, y_0)f(x, y_0)dx - m^2\right] = \frac{d}{dh}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x+h, y_0)f(x, y_0)dx\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că $\frac{dC(h)}{dh} > 0$

și prin urmare $\frac{dV(h)}{dh} < 0$

ceea ce înseamnă că $V(h)$ este o funcție crescătoare.

Determinarea semivariogramelor pe diferite direcții într-un corp de minereu sau într-o anumită structură geologică permite evaluarea diferitelor caracteristici structurale ca: variabilitatea, anizotropia, zonalitatea, microstructura, cu implicații importante în cunoașterea și estimarea corectă a rezervelor de substanță minerală.

Evident, nu pot fi determinate practic semivariogramele teoretice deoarece valorile $f(P)$ ale unei variabile naturale nu pot fi cunoscute decît în puncte discrete.

Cu datele din fig. 7.4.1. vom face diferențele, $f(x + h, y_0) - f(x, y_0)$ luînd pentru $h = Kd$ cu $K = 1, 2, \ldots$, adică multiplii echidistanței d.

Este necesar să se impună condiția $h \leqslant \frac{b-a}{4}$ pentru ca ultima valoare a semivariogramei să se calculeze pe un număr suficient de date.

Valorile semivariogramei experimentale se obțin cu relația

$$V(h) = V(Kd) = \frac{1}{2} \times \frac{\sum_{K=1}^{n(Kd)} [f(x + Kd, y_0) - f(x, y_0)]^2}{n(Kd)}$$

unde prin $n(Kd)$ am notat numărul de perechi de valori $[f(x + Kd, y_0), f(x, y_0)]$ care se pot forma pentru $h = Kd$ cu $K = 1, 2, \ldots$

Se reprezintă grafic variația valorilor $V(h)$ cu $h = Kd$ și se compară cu un model teoretic care să aproximeze cel mai bine posibil variația empirică.

7.4.2. MODELE TEORETICE ALE SEMIVARIOGRAMEI

Din experimentările practice efectuate s-a constatat că semivariograma experimentală poate să fie descrisă prin unul din următoarele modele teoretice:

I. *Modelul sferic*

$$V(h) = \begin{cases} C_0 + C\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^3}{a^3}\right) & \text{pentru } h < a \\ C_0 + C & \text{pentru } h \geqslant a \end{cases}$$

unde prin a am notat aici domeniul de influență maximă (domeniul de corelație maximă) a valorilor funcției $f(P)$.

Aceasta înseamnă că la o distanță mai mare decît „a" valorile $f(x, y_0)$ și $f(x + h, y_0)$ nu mai pot fi considerate corelabile din punct de vedere fenomenologic (nu se mai corelează spațial). Pentru $h \geqslant a$ valorile $f(x, y_0)$ și $f(x + h, y_0)$ pot să fie considerate ca realizări ale unei variabile aleatoare. Constanta C_0 este considerată componenta aleatoare a variabilei $f(P)$. Dacă $f(P)$ este caracterizată de o pronunțată corelație spațială (fenomenologică) atunci C_0 poate fi practic nulă.

Scanned with OKEN Scanner

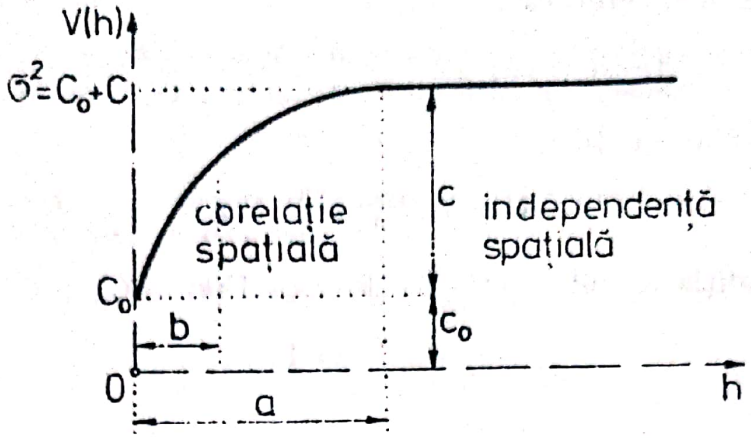

Fig. 7.4.2.

Constanta C se numește „prag" iar $C_0 + C$ reprezintă valoarea variației de dispersie a funcției $f(P)$.

Cu cît h este mai mare cu atît valorile lui C sînt mai mari, iar valoarea maximă a sumei $C_0 + C$ este atinsă atunci cînd h atinge distanța maximă a corelației spațiale.

În fig. 7.4.2. se prezintă graficul modelului sferic cu indicarea diferiților parametri.

Deseori în cazurile practice se întîlnesc suprapuneri de structuri cu diferite raze de influență. Semivariograma are în aceste cazuri forme mai complicate și se poate exprima în cazul modelului sferic sub forma:

$$V(h) = \begin{cases} C_0' + C_1\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{h}{a_1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{a_1^3}\right] + C_2\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{h}{a_2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{a_2^3}\right] & \text{pentru } 0 < h < a_1 \\ C_0' + C_1 + C_2\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{h}{a_2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{a_2^3}\right] & \text{pentru } a_1 \leqslant h < a_2 \\ C_0' + C_1 + C_2 & \text{pentru } h \geqslant a_2 \end{cases}$$

cu $a_1 < a_2$.

Pentru determinarea coeficienților C_0; C_1; ai modelului sferic pe baza valorilor semivariogramei experimentale se poate aplica și un procedeu grafic. Se prelungește prima porțiune a semivariogramei experimentale pînă la intersecția cu axa verticală (axa OV). Ordonata intersecției este C_0. Cum $C_0 + C$ este varianta de dispersie a funcției $f(P)$, adică

$$C_0 + C = \sigma_f^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} [f(P_i) - m]^2}{N - 1}$$

rezultă $C = C_0 - \sigma_f^2$

Pentru determinarea lui „a" se duce tangenta în origine și se notează cu h_0 intersecția acesteia cu dreapta orizontală $V(h) = C_0 + C$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum panta tangentei este

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_{h=0} = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{c}{a} - \frac{3}{2} \cdot \frac{h^3}{a^3}\right)_{h=0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{a}$$

rezultă următoarea ecuație:

$$V(h) = C_0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{a} h$$

Punînd condiția de intersecție cu dreapta $V(h) = C_0 + C$ avem

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{h_0}{a} = 1$$

de unde

$$a = \frac{3}{2} h_0$$

Pentru cazul unor structuri suprapuse se poate imagina de asemenea un procedeu de determinare a coeficienților C_0'; C_1; C_2; a_1; a_2, utilizînd graficul semivariogramei experimentale și punînd anumite condiții. Se va obține un sistem de ecuații în care coeficienții menționați devin necunoscute.

Evident, se poate aplica în cele două cazuri și metoda celor mai mici pătrate.

II. *Modelul exponențial*

Acest model se exprimă prin relația analitică

$$V(h) = C_0 + C(1 - e^{-\frac{1}{a}h})$$

În acest caz C_0 și C se obțin ca și în modelul sferic.

Cum derivata în origine are valoarea

$$\left.\frac{dV}{dh}\right|_{h=0} = \left.\frac{c}{a} e^{-\frac{1}{a}h}\right|_{h=0} = \frac{c}{a}$$

ecuația tangentei în origine va fi

$$V(h) = C_0 + \frac{c}{a} h$$

iar punctul de intersecție cu dreapta

$$V(h) = C_0 + C$$

va avea abscisa dată de relația

$$C_0 = \frac{c}{a} h_0 = C_0 + C.$$

de unde rezultă $h_0 = a$.

Scanned with OKEN Scanner

III. *Modelul linear*

În cazul în care punctele semivariogramei experimentale se așază aproximativ pe o linie dreaptă atunci se poate utiliza un model liniar de forma

$$V(h) = ah + b$$

Coeficienții a și b se determină prin metoda celor mai mici pătrate ca soluție a următorului sistem de ecuații:

$$nb + a\sum_i h_i = \sum V_i$$

$$b\sum_i h_i + a\sum h_i^2 = \sum_i h_i V_i$$

unde V_i; h_i sînt valorile semivariogramei calculate pentru o valoare a pasului h_i iar n este numărul de astfel de valori calculate.

IV. *Modelul logaritmic linear*

Acest model în cadrul metodelor geostatistice [48] dezvoltate pentru studierea variabilelor regionalizate a căpătat denumirea de modelul lui Wijs după numele cercetătorului care l-a utilizat prima dată. În acest model se utilizează o scară logaritmică pe abscisă și una normală pe ordonată. Pentru reprezentări grafice se folosește prin urmare hîrtie semilogaritmică.

Dacă într-o astfel de reprezentare punctele $(h_i\ ;\ V(h_i))$ se așază aproximativ linear atunci se va folosi expresia analitică

$$V(h) = a \ln h + b$$

Coeficienții a și b se determină la fel ca în cazul precedent ca soluție a următorului sistem de ecuații normale

$$nb + a\sum_i \ln h_i = \sum_i V_i$$

$$b\sum_i \ln h_i + a\sum_i \ln^2 h_i = \sum_i V_i \ln h_i$$

V. *Modelul aleator*

Acest caz se întîlnește cînd între valorile variabilei $f(P)$ în două puncte vecine nu există nici o corelație indiferent de distanța dintre ele. Se pot considera atunci valorile $f(P)$ ca realizări ale unei variabile aleatoare pentru care se pot utiliza corect tehnicile statisticii matematice.

Semivariograma în modelul aleator va avea o variație constantă fiind reprezentată printr-o dreaptă orizontală.

7.4.3. ANALIZA CARACTERISTICILOR STRUCTURALE CU AJUTORUL SEMIVARIOGRAMEI

Orice corp de minereu sau structură geologică prezintă anumite caracteristici fundamentale, specifice, care trebuie cunoscute pentru aprecierea cît mai aproape de realitate a potențialelor lor economice caracterizate prin cantitatea și calitatea rezervelor în elemente utile (acolo unde este cazul).

Aceste caracteristici fundamentale trebuie apreciate pe baza unui număr oarecare de informații obținute prin lucrările de cercetare și explorare geologică.

Scanned with OKEN Scanner

Una din metodele de apreciere cantitativă a caracteristicilor structurale este aceea bazată pe analiza semivariogramei variabilelor naturale — conținuturi în elemente utile, caracteristici fizice (rezistivitate, susceptibilitate magnetică, densitate etc.) sau grosimi (dimensiuni geometrice) ale corpurilor sau stratelor.

Să presupunem că s-a construit semivariograma variabilei $f(P)$ și că imaginea sa corespunde unui model sferic. Prima caracteristică structurală descoperită cu ajutorul semivariogramei este „raza de influență" adică distanța „a" de la care nu mai există corelație spațială (fenomonologică) între valorile variabilei $f(P)$.

În figura 7.4.2. această distanță corespunde cu abscisa punctului de la care valorile semivariogramei nu mai depind de distanța h dintre probe. Distanța „a" se determină după procedeul descris în cazul modelului sferic.

Pentru $h > a$ ne aflăm prin urmare în domeniul independenței statistice între valorile variabilei $f(P)$. Domeniul corelației spațiale este definit de $h \leqslant a$.

Raza de influență „a" va da o estimare distanței necesare între lucrările geologice de cercetare sau explorare. În cazurile în care avem structuri suprapuse, caz frecvent întîlnit în practică, se pot deosebi diferite raze de influență. Este de așteptat să se deosebească cel mai adesea două raze de influență — o rază de influență mică „b" corespunzătoare unei structuri locale și deci unei corelații fenomenologice puternice și o rază de influență mare „a" (maximă) corespunzătoare structurii regionale (corelației regionale).

Corelația locală, mai puternică, este cauzată de condițiile locale de depunere a acumulărilor de substanțe utile, iar corelația regională este cauzată de condițiile generale (majore) ale fenomenului de mineralizare.

În timp ce, așa cum s-a arătat, raza de influență regională „a" dă o estimație distanței dintre lucrările de cercetare sau explorare, raza de influență locală „b" va da o estimație a echidistanței de probare (echidistanței la care este necesar să se culeagă informațiile privind caracteristica $f(P)$).

Gradul de variabilitate al variabilei naturale $f(P)$ este indicat de mărimea $C_0 + C$ care estimează dispersia lui $f(P)$. Prin urmare, cu cît semivariograma va avea un plafon mai ridicat cu atît gradul de variabilitate al variabilei $f(P)$ va fi mai mare.

În afară de așa-numitele structuri locale și regionale se poate vorbi în cazul studierii variabilelor naturale și de microstructuri care, dacă există sau nu, definesc o mineralizație discontinuă sau continuă. Existența continuității sau discontinuității este indicată de modul de prezentare al semivariogramei în origine ($h = 0$).

Dacă $V(0) > 0$ atunci ne aflăm în prezența unei discontinuități a mineralizației și se spune că avem de-a face cu un „efect de pepită". În cazul desenului din fig. 7.4.2. valoarea C_0 reprezintă „efectul de pepită". Acest efect de pepită duce la concluzia existenței unor microstructuri, care nu au putut fi depistate la scara cercetărilor efectuate.

De regulă pasul probărilor este de ordinul metrilor, în timp ce pot exista microstructuri de ordinul centimetrilor sau chiar a milimetrilor (cazul pepitelor de aur vizibil în zăcămintele auro-argentifere). Interpretarea unui efect de pepită trebuie judicios făcută deoarece de multe ori poate să apară în mod eronat din cauza scării la care s-a determinat semivariograma și a unor extrapolări necorespunzătoare a curbelor empirice sau teoretice.

În cazurile în care semivariograma are o variație sub formă de „ʃ" tangentă axei oh începînd din origine pentru o anumită mulțime de valori a lui h, atunci

Scanned with OKEN Scanner

se spune că sîntem în prezența unui înalt grad de continuitate a variabilei $f(P)$ pe o anumită distanță. În general astfel de continuități se întîlnesc în cazul grosimilor unor strate de cărbune.

Dacă tangenta în origine la curba semivariogramei are o poziție oarecare în plan (oblică față de axa oh) atunci sîntem în cazul unei continuități în medie, caz frecvent întîlnit în practică.

O ultimă caracteristică structurală evidențiată de modul de prezentare al semivariogramei este anizotropia unei structuri geologice.

Gradul de anizotropie se descoperă construind semivariograme pe diferite direcții. Dacă variația semivariogramelor este aceeași indiferent de direcția pe care a fost determinată, se spune că sîntem în cazul unei variabile naturale izotropice. În acest caz, toate caracteristicile analizate anterior (rază de influență, variabilitate, continuitate, efect de pepită) sînt aceleași pe orice direcție.

În R^3 zona de corelație spațială va fi o sferă de rază „a" cu centrul într-un punct P. Dacă variația semivariogramei depinde de direcție, atunci avem anizotropie care poate fi de două feluri: anizotropie geometrică și anizotropie zonară.

Anizotropia geometrică se definește prin existența unui elipsoid de corelație spațială cu semiaxele a_x, a_y, a_z ca raze de influență pe trei direcții perpendiculare x, y, z.

Rapoartele $\frac{a_x}{a_y}$ și $\frac{a_x}{a_z}$ se numesc rapoarte de anizotropie pe direcțiile oy și oz și pot fi folosite pentru stabilirea configurației optime a unei rețele dreptunghiulare de cercetare.

Efectuînd o schimbare de variabile de forma

$$x' = x$$

$$y' = \frac{a_x}{a_y} y$$

$$z' = \frac{a_x}{a_z} z$$

elipsoidul de corelație spațială se transformă în sfera de rază a_x, iar distanța h dintre două puncte $P(x_1, y_1, z_1)$ și $P(x_2, y_2, z_2)$ devine

$$h' = \left[(x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{a_x}{a_y}\right)^2 (y_2 - y_1)^2 + \left(\frac{a_x}{a_z}\right)^2 (z_2 - z_1)^2\right]^{1/2}$$

Cu aceasta se poate spune că o structură prezintă anizotropie geometrică dacă printr-o transformare afină a axelor de coordonate se obține o semivariogramă izotropă.

Anizotropia geometrică poate fi observată direct după modul în care se prezintă graficul și anume: au același efect de pepită, același plafon $C_0 + C$ iar razele de influență pe cele trei direcții diferă.

Anizotropia zonară se întîlnește destul de frecvent în practică și este definită de o comportare asemănătoare a semivariogramelor determinate pe diferite secțiuni orizontale și o comportare diferită pe verticală.

De obicei fenomenele de mineralizare produc caracteristici cu variații asemănătoare în planuri orizontale, dar care variază diferit pe verticală din cauza unor condiții fizice net diferite la cote diferite.

Scanned with OKEN Scanner

7.4.4. SEMIVARIOGRAMA COARDELOR ÎNTR-UN CERC. PARALELE CU O DIRECȚIE DATĂ

Deoarece în cercetările practice se întîlnesc frecvent corpuri care în secțiune orizontală prezintă suprafețe cu contur aproximativ circular, vom studia în cele ce urmează semivariograma coardelor paralele cu o direcție dată. Acest caz este similar aceluia în care se cere efectuarea unei analize structurale pe baza grosimilor unui corp mineralizat cu contur circular în secțiune orizontală.

Lungimile lucrărilor transversale în corpul mineralizat corespund lungimilor coardelor într-un cerc.

La o situație asemănătoare se poate ajunge și atunci cînd parametrul studiat este conținutul mediu în elemente utile al lucrărilor transversale, iar variația valorilor de la lucrare la lucrare se face crescător de la marginile corpului mineralizat către centrul său. În figura 7.4.3 s-a considerat o axă imaginară (x, x) prin centrul unei secțiuni orizontale a corpului mineralizat presupus și în fiecare punct de intersecție a axei cu lucrările transversale s-a trasat cîte un segment de dreaptă de lungime egală (la o scară convenabilă) cu valoarea conținutului mediu al lucrării, perpendicular pe axă, așa fel încît 50% să se afle deasupra axei și 50% sub axă. Se obține astfel o imagine aproximativ circulară în ipoteza unei variații crescătoare de la margini spre centru (cazuri întîlnite uneori în practică).

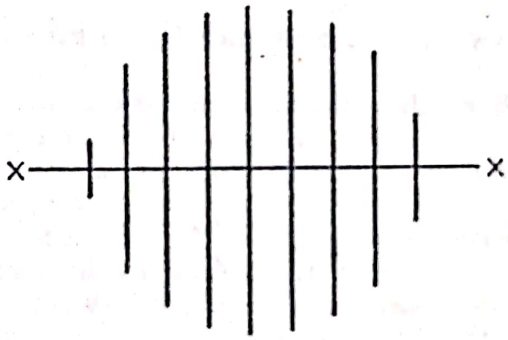

Fig. 7.4.3

Pentru determinarea modelului teoretic al semivariogramei unui asemenea caz, să considerăm un cerc de rază unitate, ceea ce nu exclude generalitatea, cu centrul în originea unui sistem de axe ortogonale și să presupunem un sistem de coarde paralele cu axa oy, echidistante cu h. Evident lungimile coardelor vor fi $l(x) = 2y(x)$ unde am notat prin $y(x)$ ordonata punctului de intersecție al unei coarde verticale cu circumferința cercului de ecuație $y^2 + x^2 = 1$.

Rezultă $l(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$

Lungimea coardei de abscisă $x + h$ va fi $l(x + h) = 2\sqrt{1 - (x + h)^2}$.

Echidistanța h variază de la zero la dublul razei cercului adică $h \in [0, 2]$

Pentru determinarea semivariogramei se fac diferențele pătratice

$$[l(x + h) - l(x)]^2$$

pentru orice $h \in [0, 2]$

Considerînd sensul de mers de la stînga la dreapta, rezultă că x poate să varieze între -1 și $1 - h$, adică $x \in [-1\,;\ 1 - h]$.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate scrie acum expresia semivariograme coardelor într-un cerc, paralele cu o direcție dată

$$V(h) = \frac{2}{2-h} \int_{-1}^{1-h} [\sqrt{1-(x+h)^2} - \sqrt{1-x^2}\,]^2\,dx$$

Notînd $E(x)$ expresia de sub semnul integralei, printr-o transformare simplă se poate scrie

$$E(x) = \left[\frac{1-(x+h)^2}{\sqrt{1-(x+h)^2}} - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]^2$$

Efectuînd o dezvoltare în serie Mac-Laurin a expresiilor $\frac{1}{\sqrt{1-(x+h)^2}}$ și $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ se obține

$$E(x) = \left\{\left[1 - \frac{1}{2}(x+h)^2 - \frac{1}{8}(x+h)^4\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right]\right\}^2$$

După calcule elementare avem

$$E(x) = \frac{h^2}{16}x^4(2x+h)^2 + \frac{1}{8}h^3x^3(2x+h)^2 + \frac{h^2}{4}\left(\frac{h^2}{2}+1\right)x^2(2x+h)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}h^3\left(\frac{h^2}{8}+\frac{1}{2}\right)x(2x+h)^2 + h^2\left(\frac{h^2}{8}+\frac{1}{2}\right)^2(2x+h)^2$$

Notînd

$$I_1 = \int_{-1}^{1-h} x^4(2x+h)^2\,dx$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1-h} x^3(2x+h)^2\,dx$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1-h} x^2(2x+h)^2\,dx$$

$$I_4 = \int_{-1}^{1-h} x(2x+h)^2\,dx$$

$$I_5 = \int_{-1}^{1-h} (2x+h)^2\,dx$$

Expresia semivariogramei se scrie:

$$V(h) = \frac{2h^2}{2-h}\left[\frac{1}{16}I_1 + \frac{h}{8}I_2 + \frac{1}{4}\left(\frac{h^2}{2}+1\right)I_3 + \frac{h}{2}\left(\frac{h^2}{8}+\frac{1}{2}\right)I_4 + \left(\frac{h^2}{8}+\frac{1}{2}\right)^2 I_5\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

Integralele $I_1 - I_5$ devin după calculele corespunzătoare:

$$I_1 = (1-h)^5\left(\frac{11}{105}h^2 - \frac{10}{21}h + \frac{4}{7}\right) + \frac{h^2}{5} - \frac{2h}{3} + \frac{4}{7}$$

$$I_2 = (1-h)^4\left(\frac{7}{60}h^2 - \frac{8}{15}h + \frac{2}{3}\right) - \frac{h^2}{4} + \frac{4h}{5} - \frac{2}{3}$$

$$I_3 = (1-h)^3\left(\frac{2}{15}h^2 - \frac{3}{5}h + \frac{4}{5}\right) + \frac{h^2}{3} - h + \frac{4}{5}$$

$$I_4 = (1-h)^2\left(\frac{1}{6}h^2 - \frac{2}{3}h + 1\right) - \frac{h^2}{2} + \frac{4h}{3} - 1$$

$$I_5 = (1-h)\left(\frac{1}{3}h^2 - \frac{2}{3}h + \frac{4}{3}\right) + h^2 - 2h + \frac{4}{3}$$

sau

$$I_1 = -\frac{1}{105}(h-2)^3(11h^4 - 39h^3 + 54h^2 - 30h + 15)$$

$$I_2 = \frac{h}{60}(h-2)^3(7h^2 - 18h + 18)$$

$$I_3 = -\frac{1}{15}(h-2)^3(2h^2 - 3h + 3)$$

$$I_4 = \frac{h}{6}(h-2)^3$$

$$I_5 = -\frac{1}{3}(h-2)^3$$

Introducînd în expresia semivariogramei, se obţine

$$V(h) = 2h^2(h-2)^2\left[\frac{23}{6720}h^4 - \frac{3}{280}h^3 + \frac{89}{1680}h^2 - \frac{19}{280}h + \frac{239}{1680}\right]$$

sau

$$V(h) = \frac{h^2(h-2)^2}{3360}(23h^4 - 72h^3 + 356h^2 - 456h + 956)$$

Se poate observa cu uşurinţă că $V(0) = V(2) = 0$ ceea ce este de aşteptat în cele două cazuri extreme.

Într-adevăr dacă $h = 0$ avem $l(x) = l(x+h)$ şi deci $V(0) = 0$ iar pentru $h = 2$ avem $x = -1$ şi $l(-1) = 0$ ceea ce conduce de asemenea la $V(0) = 0$.

Pentru a studia modul de variaţie al lui $V(h)$ se va calcula derivata de ordinul întîi în raport cu h.

Rezultă după calcule necesare

$$\frac{dV(h)}{dh} = \frac{h(h-2)}{3360}(184h^5 - 780h^4 + 2856h^3 - 5128h^2 + 6560h - 3824)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă imediat că pentru $h = 0$ și $h = 2$ avem $\frac{dV(h)}{dh} = 0$ ceea ce înseamnă că graficul funcției $V(h)$ este tangent axei absciselor atît în origine cît și în punctul $h = 2$.

Cum $V(h) > 0$ pentru orice $h \in (0, 2)$ înseamnă că $V(h)$ va prezenta un punct de maxim.

Deoarece este greu de determinat soluția ecuației

$$184h^5 - 780h^4 + 2856h^3 - 5128h^2 + 6560h - 3824 = 0$$

vom observa că expresia din membrul stîng al ecuației se mai poate scrie sub forma

$$F(h) = (h - 1)(184h^4 + 2856h^2 + 6560) + (h^2 - 1)(596h^2 + 2272) + \\ + 596h^2 - 464$$

De aici rezultă imediat $F(h) < 0$ pentru $0 < h < 1$.

Într-adevăr notînd

$$\varphi(h) = (h - 1)(184h^4 + 2856h^2 + 6560)$$

$$\psi(h) = (h^2 - 1)(596h^2 + 2272)$$

$$\tau(h) = 596h^2 - 464$$

se observă că pentru $h < 1$.

$$\varphi(h) < 0; \quad \psi(h) < 0$$

iar $\tau(h)$ este mult mai mic decît $\varphi(h) + \psi(h)$.

$$\text{Cum } \frac{dV(h)}{dh} = \frac{h(h-2)}{3360} F(h)$$

rezultă

$$\frac{dV(h)}{dh} > 0 \text{ pentru } 0 < h < 1$$

Pentru $h > 1$ rezultă imediat

$$\frac{dV(h)}{dh} < 0.$$

deoarece $F(h) > 0$.

Prin urmare funcția $V(h)$ este crescătoare pentru $0 < h < 1$ și descrescătoare pentru $1 < h < 2$ ceea ce înseamnă că în punctul $h = 1$ trebuie să prezinte un maximum.

Înlocuind $h = 1$ în expresia derivatei se obține

$$\left.\frac{dV(h)}{dh}\right|_{h=1} = 0{,}039$$

Nu s-a obținut anularea derivatei pentru $h = 1$ evident din cauza limitării seriilor Mac-Laurin la primii termeni.

Scanned with OKEN Scanner

Cum în general construirea semivariogramelor se recomandă pentru valori ale lui h cel mult egale cu jumătate din domeniul de variaţie al lui x, vom prezenta în tabelul următor valorile lui $V(h)$ pentru $h = \frac{i}{10}$ cu $i = 0, 1, 2, \ldots 10$ iar în figura 7.4.4 graficul de variaţie.

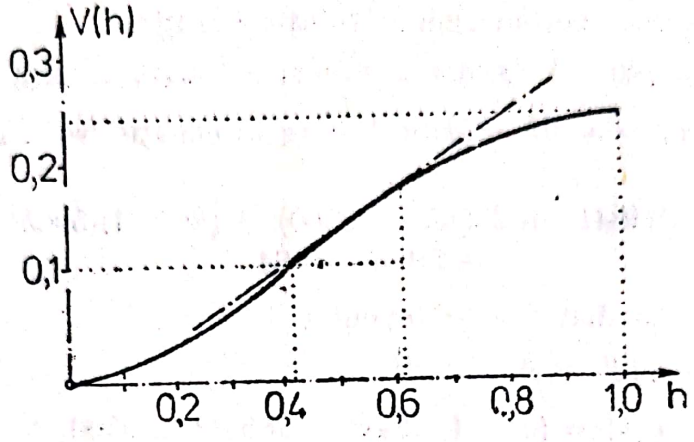

Fig. 7.4.4.

Tabelul 5.1

h	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$V(h)$	0	0,0005	0,0339	0,0621	0,1008	0,1355	0,1676	0,1952	0,2172	0,2324	0,2402

Din faptul că curba $V(h)$ este tangentă în originea axei absciselor rezultă continuitatea variabilei $l(x)$ ceea ce era de aşteptat ţinînd seama de definirea acesteia ca o coardă în cerc. Ceea ce era de asemenea natural, s-a obţinut şi un efect de pepită nul.

Dispersia coardelor în cercul de rază unitate, paralele cu o direcţie dată, este

$$\sigma^2_{l(x)} = 0{,}24$$

adică aproximativ o pătrime din raza cercului.

Raza de influenţă maximă este egală cu raza cercului.

În cazul în care avem de-a face în practică cu structuri asemănătoare modelului prezentat atunci se poate constata şi faptul că s-ar putea separa şi o structură locală (de corelaţie maximă) de lungime egală cu $\frac{1}{10}$ din raza structurii, aceasta deoarece pentru $h \in [0; 0{,}1]$ variaţia lui $V(h)$ este nesemnificativă. Prin urmare o eşantionare pentru cunoaşterea structurii ar trebui să se execute la o echidistanţă mai mică decît o zecime din raza structurii.

Se poate observa de asemenea că pentru $h \in [0{,}2; 0{,}8]$ variaţia curbei $V(h)$ poate fi aproximată cu o linie dreaptă şi anume cu tangenta în punctul de inflexiune (punctul de abscisă $h = 0{,}5$).

Panta tangentei va fi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left.\frac{dV(h)}{dh}\right|_{h=0{,}5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Un calcul rapid se realizează grafic luînd

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta V(h)}{\Delta h}$$

pentru diferența Δh dintre $h = 0{,}6$ și $h = 0{,}4$.

Rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V(0{,}6) - V(0{,}4)}{0{,}2} = \frac{0{,}0668}{0{,}2} = 0{,}334$$

Ecuația dreptei de aproximare va fi

$$V(h) = a + 0{,}334\ h$$

Impunînd condiția ca această dreaptă să treacă și prin punctele de abscisă $h = 0{,}4$ și $h = 0{,}6$ se obține

$$V(h) = -0{,}0328 + 0{,}334\ h$$

Creșterea aproximativ liniară a valorilor semivariogramei pentru $h \in [0{,}2; 0{,}8]$ arată că variabilele $l(x)$ și $l(x + h)$ prezintă o corelație regională pînă la o echidistanță maximă $h = 0{,}8$ după care variația lui $V(h)$ fiind nesemnificativă se intră în domeniul de independență.

Se propune, din aceste motive, utilizarea ca rază maximă de influență a unei distanțe egale cu 0,8 din raza structurii.

7.4.5. SEMIVARIOGRAMA COARDELOR ÎNTR-O ELIPSĂ, PARALELE CU DIRECȚIA AXELOR

Vom determina acum semivariograma coardelor paralele cu direcția unei axe a unei elipse, caz întîlnit în practica cercetărilor geologice prin lucrări de explorare a unor lentile de minereu care în secțiune orizontală sau verticală prezintă suprafețe al căror contur poate fi modelat printr-o elipsă. Fie a și b respectiv semiaxa mare și semiaxa mică a elipsei. Într-un sistem de coordonate cu originea în centrul elipsei ecuația canonică a acesteia se scrie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Lungimea coardelor paralele cu axa mică va fi $l(x) = 2y(x)$, sau

$$l(x) = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Pentru creșteri h date lui x se obțin lungimile coardelor în punctele $x + h$, adică

$$l(x + h) = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - (x + h)^2}$$

Se observă că x poate lua valori în intervalul $[-a; a - h]$ iar h în intervalul $[0, 2a]$.

Scanned with OKEN Scanner

Expresia de principiu a semivariogramei lungimii coardelor $l(x)$ este

$$V(h) = \frac{1}{2(2a-h)} \int_{-a}^{a-h} \left[\frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - (x+h)^2} - \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right]^2 dx$$

sau

$$V(h) = \frac{2b^2}{(2a-h)} \int_{-a}^{a-h} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x+h}{a}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 dx$$

Notînd ca şi în cazul precedent

$$E(x) = \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x+h}{a}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2$$

sau ceea ce este echivalent:

$$E(x) = \left[\frac{1 - \left(\frac{x+h}{a}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+h}{a}\right)^2}} - \frac{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \right]^2$$

se obţine după o dezvoltare în serie Mac-Laurin a expresiilor $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+h}{a}\right)^2}}$ şi $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$ următoarea formă aproximativă pentru $E(x)$:

$$E(x) = \left\{ \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x+h}{a}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{x+h}{a}\right)^4 \right] - \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{a}\right)^4 \right] \right\}^2$$

sau

$$E(x) = \frac{h^2}{8a^8} \left[\frac{1}{2} x^4 (2x+h)^2 + hx^3(2x+h)^2 + (h^2+2a^2)x^2(2x+h)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{2}(h^2+4a^2)x(2x+h)^2 + \frac{(h^2+4a^2)^2}{8}(2x+h)^2 \right]$$

Cu relaţiile din subcapitolul precedent privind integralele $I_1 - I_5$ dar cu limitele de integrare de la $-a$ la $a-h$, expresia semivariogramei se scrie:

$$V(h) = \frac{b^2h^2}{4a^8(2a-h)} \left[\frac{1}{2} I_1 + hI_2 + (h^2+2a^2)I_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{2}(h^2+4a^2)I_4 + \frac{(h^2+4a^2)^2}{8} \cdot I_5 \right]$$

Scanned with OKEN Scanner

Integralele $I_1 - I_5$ au următoarele valori

$$I_1 = (a-h)^5\left(\frac{11}{105}h^2 - \frac{10}{21}ah + \frac{4}{7}a^2\right) + \frac{a^5}{5}h^2 - \frac{2a^6}{3}h + \frac{4}{7}a^7$$

$$I_2 = (a-h)^4\left(\frac{7}{60}h - \frac{8}{15}ah + \frac{2}{3}a^2\right) - \frac{a^4}{4}h^2 + \frac{4a^5}{5}h - \frac{2}{3}a^6$$

$$I_3 = (a-h)^3\left(\frac{2}{15}h^2 - \frac{3}{5}ah + \frac{4}{5}a^2\right) + \frac{a^3}{3}h^2 - a^4h + \frac{4}{5}a^5$$

$$I_4 = (a-h)^2\left(\frac{1}{6}h^2 - \frac{2a}{3}h + a^2\right) - \frac{a^2}{2}h^2 + \frac{4a^3}{3}h - a^4$$

$$I_5 = (a-h)\left(\frac{h^2}{3} - \frac{2a}{3}h + \frac{4}{3}a^2\right) + ah^2 - 2a^2h + \frac{4}{3}a^3$$

sau

$$I_1 = -\frac{1}{105}(h-2a)^3(11h^4 - 39ah^3 + 54a^2h^2 - 30a^3h + 15a^4)$$

$$I_2 = \frac{h}{60}(h-2a)^3(7h^2 - 18ah + 18a^2)$$

$$I_3 = -\frac{1}{15}(h-2a)^3(2h^2 - 3ah + 3a^2)$$

$$I_4 = \frac{h}{6}(h-2a)^3$$

$$I_5 = -\frac{1}{3}(h-2a)^3$$

Expresia semivariogramei devine

$$V(h) = \frac{b^2h^2(h-2a)^3}{3360a^3}(23h^4 - 72ah^3 + 356a^2h^2 - 456a^3h + 956a^4)$$

Se observă că pentru $a = b = 1$ se obţine semivariograma coardelor într-un cerc de rază unitate, paralele cu o direcţie dată.

Se verifică de asemenea că $V(0) = V(2a) = 0$.

Pentru $h = a$, adică pentru o echidistanţă a coardelor egală cu semiaxa mare se obţine $V(h = a) = 0{,}2402b^2$, adică produsul dintre valoarea maximă a semivariogramei coardelor într-un cerc şi pătratul axei mici a elipsei considerate.

Rezultă că pentru $h = a$ semivariograma coardelor într-o elipsă, paralele cu axa mică, va avea valoarea maximă, adică

$$\text{Max } V(h) = V(a)$$

$$h \in [0,\ 2a]$$

Pentru valori ale lui $h = \frac{i}{10}a$ cu $i = 0, 1, 2, \ldots 10$ se vor obţine valori ale semivariogramei coardelor într-o elipsă, egale cu valorile din tabelul anterior multiplicate cu b^2.

De observat că valoarea maximă a semivariogramei şi deci dispersia coardelor într-o elipsă, paralele axei mici, nu depinde de mărimea axei mari, ci doar de mărimea axei mici a elipsei.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

[1] Ambarcumjan, R., V., *The solution to the Buffon-Sylvester Problem Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwande Gebiete.* 27(1973), 53—54; 29(1974), 25—31; (1978),44.

[2] Baddeley, A., *A fourth note on recent research in geometrical probability.* Advances in Applied Probability, vol. 9(1974) 824—865.

[3] Barbier, E., *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert.* Journal de Math. pures et appl. (2), 5, (1860) 273—286.

[4] Bercker, R., M., Hazen, S., W., *Particle statistics of infinite population as applied to mine sampling.* U.S.B.M.R.I. (1961) 5669.

[5] Blaschke, W., *Vorlesungen über Integralgeometrie,* Deutsch. Verlag der Wiss., Berlin (1955).

[6] Blaschke, W., *Cinematica integrale.* Rend. Acc. Naz. Lincei (6), 23, (1936) 546—547.

[7] Blaschke, W., *Über geschlossen Kurven und Flächen in der eliptischen Geometrie,* 22, Abh. Math Sem. Univ. Hamburg 12(1937).

[8] Bronowski, J., Neyman, J., *The variance of the measure of a twodimensional random set.* Ann. Math. Statist. 16(1945), 330—341.

[9] Buffon, G. L. L., *Essai d'Arithmetique Morale.* Suppl. a l'Histoire Natur —IV, Paris (1777).

[10] Cartan, H., *Formes differentielles,* Herman, Paris (1967).

[11] Chern, S., S., Yien, C., T., *Sulla formule principale cinematica dello spazio ad n dimensioni.* Bull. Mat. Ital. (2) (1940), 434—437.

[12] Chern, S., S., *On the kinematic formula in the euclidean space of n dimesions,* Amer. J. Math. 74(1952), 227—236.

[13] Chern, S., S., *Differential geometry and integral geometry,* Proc. Internat. Congr. Math., Edinburgh (1958), 441—449. Cambridge Univ. Pres, New York, (1960).

[14] Creangă-Samboan, A., *Mulțimi aleatoare, acoperiri aleatoare,* St. și Cerc. Mat., Tom 23, Nr. 6(1971), 845—851.

[15] Crofton, M., W., *Sur quelques théorèmes de calcul integral.* Acad. Sci. Paris (1869) 1469—1470.

[16] Crofton, M., W., *On the theory of local probability,* Phil. Trans. Roy. Soc. London, 158, (1868), 181—199.

[17] Crofton, M., W., *Probability.* In: Encyclopedia Britanica, 9th ed., vol. 19, (1885), 768—788.

[18] Czuber, E., *Geometrische Wharscheinlichkeiten und Mittelwerte.* Teubner, Leipzig (1884).

[19] Czuber, E., *Zut Theorie den geometrischen Wahrscheinlichkeiten.* Sitz., Akad. Wiss. Wien 90(2), (1884), 719—742.

[20] Deltheil, R., *Probabilités géometriques.* Gauthier-Villars, Paris, (1926).

[21] Deltheil, R., *Probabilités géometriques,* Sciencia, 52, 1—10 (1932).

[22] Filipescu, D., *On some integral formulas for convex bodies.* Stud. Cerc. Mat. 22(1970), 1013—1031.

Scanned with OKEN Scanner

[23] Filipescu, D., *On some integral formulas relative to convex curves in a riemannian space V_2 of constant curvature.* Stud. Cerc. Mat. 23(1971), 561—578.

[24] Filipescu, D., *Integral formulas relative to convex figures in the euclidean space E_2.* Stud. Cerc. Mat. 23(1971), 693—709.

[25] Filipescu, D., *Formule integrale pentru sisteme de figuri convexe aleatoare în spații riemaniene.* Bul. Inst. Politehnic București, 33(1971), 25—30.

[26] Filipescu, D., *Integral formule for systems of random convex figures in Euclidean space.* Bull. Inst. Politec. București, 34(1972), 21—36.

[27] Filipescu, D., *Unele aplicații ale teoriei rețelelor în planul euclidian.* Stud. Cerc. Mat. 24(1972) 187—192.

[28] Filipescu, D., *Aplicații ale teoriei rețelelor în spațiile euclidiene, E_3, E_n.* Stud. Cerc. Mat. 24(1972). 749—756.

[29] Filipescu, D., *Formule integrale în spațiile riemaniene cu curbură constantă.* Stud. Cerc. Mat.. 21(1972), 757—765.

[30] Filipescu, D., *Mulțimi convexe aleatoare în planul euclidian.* Bul. Inst. Politehnic București 34(1972), 21—31.

[31] Filipescu, D., *Măsura unor mulțimi aleatoare din spațiile riemaniene cu curbură constantă.* Bul. Inst. Politehnic București, 35(1), (1973), 21—28.

[32] Filipescu, D., *Asupra unor mulțimi aleatoare din spațiile euclidiene E_3, E_n.* Bul. Inst. Politehnic București 35(2), (1973), 21—29.

[33] Filipescu, D., *Une formule intégrale dans l'espace euclidien E_3.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 21(7), (1976), 851—863.

[34] Filipescu, D., *Quelques formules integrales dans l'espace euclidien E_3.* Rend. Circ. Mat. Palermo, 25(1976), 183—188.

[35] Filipescu, D., *Quelques formules integrales dans l'espace euclidien R_n.* Ann. Fac. Sci. Kinshasa, Zaire, Vol. 3 nr. 1(1977), 46—60.

[36] Filipescu, D., *Une valeur moyenne pour l'integrale de la courbure moyenne.* Bull. Inst. Politec. București, XL(3) (1978), 3—4.

[37] Filipescu, D., *Une formule intégrale de l'espace euclidien E_n.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 23(6), (1978), 887—891.

[38] Filipescu, D., *Quelques formules integrales dans le plan euclidien.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl., Tome XXIV, nr. 9(1979), 1313—1316.

[39] Firey, W., J., *Support flats to convex bodies.* Geometria Dedicata 2(1973), 225—248.

[40] Frank, R., A., Jorgensen, E., Ralph Segnit, *Cooper flash smelting simulation experiments.* Proc. Australas, Inst. Min. Metall. Nr. 261, March. (1977), 39—46.

[41] Hadwiger, H., *Über Mittelwerte in Figurengitter.* Comment. Math. Helv. 11 (1939), 221—233.

[42] Hadwiger, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer, Berlin (1957).

[43] Kendall, D. G., *On the number of latice points inside a random oval.* Quart. J. Mat. (2), 19(1948), 1—26.

[44] Kendall, D. G., Rankin, R., A., *On the number of points of a given latice in a random hypersphere.* Quart. J. Math. (2)24(1953), 178—189.

[45] Kendall, M., G., Moran, P., A., P., *Geometrical Probability.* Griffin, London (1963).

[46] Kim, Y., C., Williamson, G., B., Sturgul, J., R., *A short course on mine system simulation using a digital computer.* Course College of Mines, Univ. Arizona, Tucson (1973).

[47] Lebesgue, H., *Exposition d'une memoire de M. W. Crofton.* Nouv. Ann. Math. (4), (1912), 481—502.

[48] Matheron, G., *The theory of regionalized variables and its applications.* Ecole Nationale Superieure des Mines Paris (1971).

[49] Matheron, G., Formery Ph., *Recherche d'optimum dans la reconnaissance de la mise en exploitation des gisements minér.* Ann. des Mines (Fr.) mai (1963) 219—238.

Scanned with OKEN Scanner

[78] Stoka, M., I., *Sur quelques probabilités géométriques liées aux système de corps convexes dans un espace euclidien* E_n. Bull. U.M.I. (4) (1975).

[79] Stoka, M., I., *Geometrie integrală*. Ed. Acad. R.S.R. (1967).

[80] Stoka, M., I., *Probabilités géométriques dans l'espace euclidien* E_n. Rend. Circole Mat. Palermo, Serie II, Tom XXIV (1975).

[81] Stoka, M., I., *Probabilités géométriques de type Buffon dans le plan euclidien*. Atti della Acad. delle Scienze di Torino. Vol. 110 (1975—1976).

[82] Stoka, M., I., *Geométria integrale in uno spazio euclideo* E_n. Bull. U.M.I. 13 (1958).

[83] Streit, F., *On multiple integral geometric integrals and their applications to probability theory*. Canad. Mat. 22 (1970), 151—163.

[84] Sylvester, J., I., *On a funicular solution of Buffon's problem of the needle, in its most general form*. Acta. Math. 14, 185—205 (1890—1891).

[85] Trandafir, R., *Familles de courbes mesurables du plan euclidien*. Revue. Roum. de math. pures et appl. 11, 8, 1009—1013 (1966).

[86] Trandafir, R., *Familles de courbes mesurables du plane euclidien*. (II) Revue Roum. de Math. pures et appl. 12(1967).

[87] Trandafir, R., *Familii de varietăți cu unu, doi, trei parametri, măsurabile din spațiul euclidian* E_3. St. Cerc. Mat. 19, 4(1967).

[88] Trandafir, R., *Probleme de acoperiri în spațiul euclidian* E_3. St. Cerc. Mat. 19, 8(1967).

[89] Trandafir. R., *Problems of integral geometry of lattices in a euclidean espace* E_3. Bull. U.M.I. (3)XXII, 228—235 (1967).

[90] Trandafir, R., *Diverse extensiuni ale problemei acului lui Buffon*. St. Cerc. Mat. 20, 5 (1969).

[91] Trandafir, R., *Problemi di geometria integrali delle reti di uno spazio omogeneo*. Rend. del. Sem. Mat. di Messina (1969).

[92] Trandafir, R., *Les espérances mathématiques et les variances de quelques variables aléatoires associées à des familles d'ovales*. Bull. Acad. Royale de Belgique, 5-serie, TomLX (1974—1975).

[93] Trandafir, R., Leonte, A., *Clasic și actual în calculul probabilităților*. Ed. Dacia (1974).

[94] Tricomi, F., *Densita di un continuo di punti o di rette di una correspondenza*. Rend. Acad. Naz. Lincei (6)23(1936), 313—316.

[95] Van der Jijin, G., *Sur la mesure d'un ensemble autre qu'un ensemble de points et son application au problème de Buffon*. Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 2 104—108 (1933).

[96] Varga, O., *Crofton formeln für den Raum*. (G.I. 3) Math. Ztachr., 40, 387—405 (1930).

[97] Vidal Abascal, E., *Sobre los fundamentos de la geometria integral*, Mem. Acad, Cienc. Madrid, 4, 4, 1—29 (1953).

[98] Vrănceanu, G., *Asupra măsurabilității grupurilor Lie*. Stud. Cerc. Mat. 13, 1, 7—19 (1962).

[99] Zorilescu, D., *Metode matematice de analiză și decizie în geologie și minerit*. Ed. Tehnică, București (1972).

[100] Zorilescu, D., *Determinarea probabilităților de interceptare a zonelor mineralizate cu rețele de prospectare geofizică*. St. Cerc. Geol. Geofiz. Geogr., Seria Geof., nr. 1(1971), 73—78.

[101] Zorilescu, D., *Analiza matematică a rețelelor de explorare în scopul optimizărilor*. Rev. Minelor nr. 2 (1974).

[102] Zorilescu, D., *Aplicații ale probabilităților geometrice și numerelor aleatoare în geofizică*. St. Cerc. Geol., Geofiz., Geogr., Seria Geof., T. 14, nr. 1(1976), 91—103.

[103] Zorilescu, D., *Metode matematice privind determinarea rețelelor de cercetare și explorare geologică*. Curs, Centrul de Perfecționare a cadrelor din Ministerul Minelor, Petrolului și Geologiei. Rev. Mine, Petrol. Gaze, nr. 4(1979), București.

[104] Zorilescu, D., *Contribuții privind estimațiile caracteristicilor aleatoare ale imaginilor particolelor pe secțiuni subțiri și modele de simulare cu aplicații în cercetările geologice*. Teză de doctorat, octombrie (1980), București.

[105] *Lecture Notes in Biomathematic*, vol. 23, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1978).

Scanned with OKEN Scanner

CĂRȚI DE MATEMATICĂ APĂRUTE LA EDITURA DACIA

Popoviciu, Elena,
Elemente de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării, prefață de acad. T. Popoviciu, rezumat în l. franceză.

Marusciac, Ioan,
Metode de rezolvare a problemelor tratate prin exemple.

Bărbosu, Alexandru,
Noțiuni de algebră abstractă tratate prin exemple.

Breckner, Wolfgang W.,
Introducere în teoria problemelor de optimizare convexă cu restricții, partea I-a.

Leonte, Aristide, Trandafir, Rodica,
Clasic și actual în calculul probabilității, prefață de acad. Gh. Mihoc.

Nemethi Ladislau,
Programa[redacted] în timp a fabricației

Păvăloiu, Ion,
Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor

* * *,
Bazele matematice ale teoriei fiabilității rezumat în lb. engleză și lb. rusă, autori: Gh. Mihoc, Aneta Muja, Eug. Diatcu.

* * *,
Introducere în teoria ecuațiilor operatoriale, Gh. Coman, Ileana Rus, Garofița Pavel, Ioan A. Rus.

Nemethi, Ladislau,
Metode euristice de ordonanțare a fabricației.

Rus, Ioan A.,
Principii și aplicații ale teoriei punctului fix.

Scanned with OKEN Scanner

Oprișiu, Nicolae,
Mai în glumă mai în serios (jocuri matematice).

Păvăloiu, Ion,
Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare.

Pavel G., Tomuța, F.,
Matematici speciale. Aplicații.

Konnerth Oliver,
Greșeli tipice în analiză și corectarea lor prin contraexemple.

Scanned with OKEN Scanner

Lector: MONICA CREMENE
Tehnoredactor: L. HLAVATHY

Apărut: 1981. Bun de tipar: 14. 09. 1981. Comanda nr. 1964.
Coli de tipar: 17. Hîrtia: Scris I A 90 g/mp.
Format: 16/70×100.

Tiparul executat sub comanda nr. 174/1981
la Întreprinderea Poligrafică Cluj, Municipiul Cluj-Napoca
B-dul Lenin nr. 146.
Republica Socialistă România.

Scanned with OKEN Scanner